HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 115

Analoge und digitale Rechenverfahren zur Approximation vorgegebener Übertragungsfunktionen mit Transversalfiltern

von

Peter Noll

und
Rolf Block

Berlin
1970

Technischer Bericht Nr. 115

Analoge und digitale Rechenverfahren zur Approximation vorgegebener Übertragungsfunktionen mit Transversalfiltern.

Zusammenfassung

Transversalfilter sind Laufzeitketten mit äquidistanten Anzapfungen; ist die Größe der an diesen Anzapfungen anstehenden Signalkomponenten einstellbar und werden die somit bewerteten, zeitlich verschobenen Signalanteile aufsummiert, so bildet diese Struktur einen Vierpol mit einstellbaren Übertragungseigenschaften.

In der vorliegenden Arbeit werden Möglichkeiten untersucht, vorgegebene Übertragungsfunktionen mit Transversalfiltern zu erzeugen; dazu werden einige Verfahren zur Bestimmung der Einstellkoeffizienten beschrieben. Vor allem wird ein analoges (Rechen-) Verfahren diskutiert, das von an (Dioden-) Funktionsgebern eingestellten Übertragungsfunktionen ausgeht und nach einem - von Hand oder automatisch vorgenommenen - Abgleich die optimalen Einstellkoeffizienten liefert. Die Brauchbarkeit und die Grenzen dieses Verfahrens werden an einigen Beispielen gezeigt.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung
Berlin-Charlottenburg

Die Bearbeiter:

Rolf Block
(cand. ing. R. Block)

Peter Noll
(Dr.-Ing. P. Noll)

Der Abteilungsleiter:

Berger
(Prof. Dr.-Ing. E.R. Berger)

Der Institutsdirektor:

P. Matthieu
(Prof. Dr. phil. P. Matthieu)

Berlin-Charlottenburg, den 7. April 1970

Inhaltsangabe

1. Aufgabenstellung, Zusammenfassung

Auf vielen Gebieten der Nachrichtentechnik werden Vierpole benötigt, mit denen Übertragungskanäle verschiedener Art simuliert werden können. So kann die Brauchbarkeit neuer Sprach- oder Datenübertragungssysteme für das Fernsprechnetz nur im Zusammenhang mit den Eigenschaften der zur Verfügung stehenden Fernsprechkanäle beurteilt werden. Im Fernsprechnetz werden bei jedem Verbindungsaufbau neue Teilabschnitte zusammengeschaltet, es entstehen jeweils andere Übertragungseigenschaften. Daher sind zur Simulation solcher Kanäle nur Anordnungen verwendbar, die eine einfache und schnelle Änderung der eingestellten Übertragungseigenschaften zulassen.

Für die Simulation linearer Vierpole mit weitgehend beliebigen Übertragungseigenschaften sind Verzweigungsnetzwerke besonders geeignet /1,2/. Das einfachste dieser Netzwerke ist das Transversalfilter (Echoentzerrer). Es besteht aus einer Laufzeitkette mit im allgemeinen äquidistanten Anzapfungen; ist die Größe der an diesen Anzapfungen anstehenden Signalkomponenten einstellbar und werden die somit bewerteten, zeitlich verschobenen Signalanteile aufsummiert, so bildet diese Struktur einen Vierpol mit einstellbaren Übertragungseigenschaften. Die Übertragungsfunktion wird durch die Bewertungsfaktoren (Einstellkoeffizienten) der einzelnen Anzapfungen bestimmt, da mit den Einstellkoeffizienten die Impulsantwort des Vierpols festgelegt wird /3/.

Neben dem Transversalfilter, das als nichtrekursives Verzweigungsnetzwerk eine Impulsantwort endlicher Länge liefert, können auch rückgekoppelte, rekursive Netzwerke zur Darstellung von Übertragungsfunktionen verwendet werden. Das Transversalfilter ist i. a. aufwendiger als ein rekursives Filter, da mit ihm nur Nullstellen, jedoch keine Pole realisiert werden können; andererseits ist hierdurch ein immer stabiles Verhalten des Transversalfilters gewährleistet. Die Stabilität des Netzwerkes sowie die Eigenschaft, daß die Einstellkoeffizienten des Transversalfilters den Abtastwerten der Impulsantwort entsprechen, ermöglichen ein einfaches Arbeiten - vor allem dann, wenn die Übertragungseigenschaften häufig geändert werden müssen.

In der vorliegenden Arbeit werden Möglichkeiten untersucht, vorgegebene Übertragungsfunktionen mit Transversalfiltern zu erzeugen; dazu werden einige Verfahren zur Bestimmung der Einstellkoeffizienten beschrieben. Vor allem wird ein analoges (Rechen-) Verfahren diskutiert, das von an (Dioden-) Funktionsgebern eingestellten Übertragungsfunktionen ausgeht und nach einem - von Hand oder automatisch vorgenommenen - Abgleich die optimalen Einstellkoeffizienten liefert. Die Brauchbarkeit und die Grenzen dieses Verfahrens werden an einigen Beispielen gezeigt.

2. Prinzip und Realisierungsmöglichkeiten des Transversalfilters

2.1 Das Prinzip des Transversalfilters /1,3,4/

Transversalfilter bestehen aus N hintereinandergeschalteten Laufzeitgliedern; jedes Laufzeitglied verzögert ein Eingangssignal um die Zeit T.

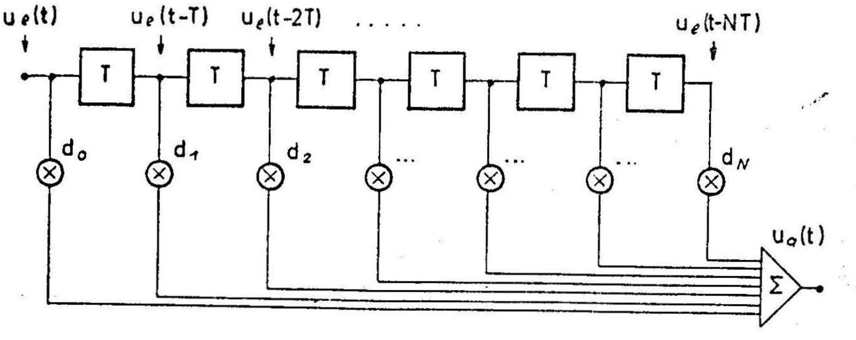


Abb. 1 Prinzip des Transversalfilters.

Werden die zu einem beliebigen Zeitpunkt t an den Ausgängen der einzelnen Laufzeitglieder anstehenden Signalanteile mit Einstellkoeffizienten d_k

(2.1) $$-1 \leq d_k \leq +1 \qquad k = 0,1,2,\ldots N$$

bewertet und aufsummiert, so gilt für das Ausgangssignal

(2.2) $$u_a(t) = \sum_{k=0}^{N} d_k \cdot u_e(t - kT)$$

Das Transversalfilter ist ein linearer Vierpol, seine Eigenschaften können durch die Übertragungsfunktion

(2.3) $$H(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

oder durch die Antwort $u_a(t) = h(t)$ des Netzwerks auf die Distribution $\delta(t)$ (= Dirac - Impuls) als Eingangssignal beschrieben werden:

(2.4) $$u_a(t) = h(t) \quad \text{für } u_e(t) = \delta(t)$$

$h(t)$ und $H(j\omega)$ sind durch die Fourier-Transformation miteinander verknüpft:

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H(j\omega)$$
$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$
$$H(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

Aus (2.2) folgt mit (2.4):

$$h(t) = \sum_{k=0}^{N} d_k\delta(t - kT) \qquad k = 0,1,2,..N$$

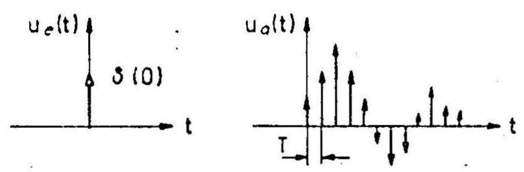


Abb. 2 Die Impulsantwort des idealen, kausalen Transversalfilters.

Die Impulsantwort ist also eine Folge von (N + 1) mit den jeweiligen Einstellkoeffizienten d_k bewerteten δ-Impulsen $d_k\delta(t - kT)$.

Aus der letzten Gleichung ergibt sich mit

$$\delta(t - t_o) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-j\omega t_o}$$

die Übertragungsfunktion des Transversalfilters:

(2.5) $$H(j\omega) = \sum_{k=0}^{N} d_k e^{-jk\omega T}$$

Die Übertragungsfunktion ist also periodisch über der Frequenz mit der Periode $2\pi/T$; sie wird im übernächsten Abschnitt ausführlich diskutiert.

2.2 Das Transversalfilter als nichtkausales System

Die Untersuchung der Eigenschaften der Transversalfilter wird übersichtlicher, wenn die Übertragungsfunktion von der Mitte eines Transversalfilters mit 2M Verzögerungsgliedern zum Ausgang hin betrachtet wird. Wir lassen somit die zwischen dem Eingang und der Mitte des Netzwerks auftretende konstante Laufzeit MT unberücksichtigt und betrachten die Impulsantwort $h_m(t)$ und die Übertragungsfunktion $H_m(j\omega)$.

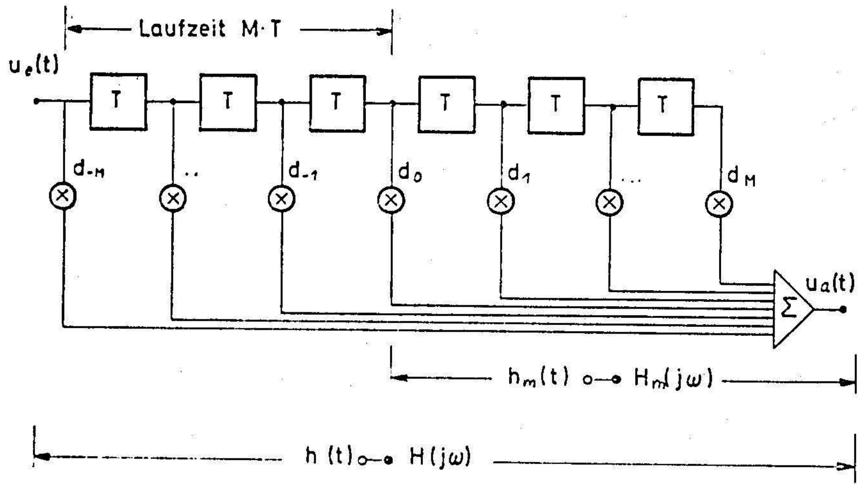


Abb. 3 Definition der Übertragungsfunktion $H_m(j\omega)$

Es gilt:

$$h_m(t) = h(t - MT)$$

$$= \sum_{K=-M}^{+M} d_k \cdot \delta(t - kT) \qquad (2.6)$$

$h_m(t)$ ist die Impulsantwort eines nichtkausalen Systems, wenn $d_{-k} \neq 0$ ist ($k = 1,2,\ldots M$). Die d_{-k} - Werte machen eine Vorhersage der Impulsantwort bezüglich der Mitte des Transversalfilters.

Die Übertragungsfunktion ergibt sich als Fourier-Transformierte nach dem Verschiebungstheorem zu

$$H_m(j\omega) = H(j\omega)e^{-j\omega MT}$$

$$= \sum_{K=-M}^{+M} d_k e^{-jk\omega T} \tag{2.7}$$

$H_m(j\omega)$ ist eine periodische komplexe Funktion mit der Periode $\Omega = 2\pi/T$. Die d_k - Werte sind die Fourier-Koeffizienten der trigonometrischen Entwicklung von $H_m(j\omega)$ (s. Abschnitt 3.1)*.

Der Zusammenhang zwischen $h_m(t)$ und $H_m(j\omega)$ kann mit Hilfe des Prinzips der paarigen Echos anschaulich gemacht werden: wir fassen zwei symmetrisch zum Nullpunkt liegende Glieder (das vor- und nacheilende Echo) zusammen:

$$h_{mk}(t) = d_k \cdot \delta(t - kT) + d_{-k} \cdot \delta(t + kT)$$

Ein Vierpol mit dieser Impulsantwort hat aber eine cosinusförmig verlaufende Übertragungsfunktion der Frequenz k/T, wenn $d_k = d_{-k}$ ist, denn eine cos - Zeitfunktion hat ja ein Linienspektrum mit 2 Linien bei $-\omega_o$ und $+\omega_o$. Damit ergibt sich die Übertragungsfunktion für die obige Impulsantwort aus der Dualitätseigenschaft der Fourier-Transformation:

$h(t)$ ○—● $H(j\omega)$

$H(\pm t)$ ○—● $2\pi h(\mp j\omega)$

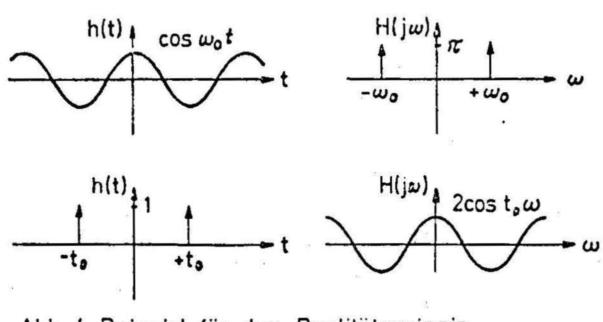


Abb. 4 Beispiel für das Dualitätsprinzip.

---

* Die Koeffizienten der Fourier-Entwicklung einer reellen Funktion müssen paarweise auftreten, sie sind konjugiert komplex zueinander. Die Fourier-Koeffizienten einer komplexen Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ müssen wegen $H(-j\omega) = H^*(j\omega)$ reell sein.

Für $d_k = -d_{-k}$ ergibt sich eine sinusförmige Schwankung der Übertragungsfunktion. Jedes Echopaar (d_{-k}, d_k) im Abstand (-kT, +kT) von der Mitte des Transversalfilters liefert einen Beitrag zu der Übertragungsfunktion $H_m(j\omega)$, die somit durch eine Summe von trigonometrischen Funktionen gebildet wird (Fouriersynthese).

Die Übertragungsfunktion des nichtkausalen Transversalfilters

$$H_m(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$= \sum_{k=-M}^{+M} d_k e^{-jk\omega T}$$

kann mit

$$d_k = g_k - u_k \qquad (2.8)$$
$$d_{-k} = g_k + u_k$$

in ihren Real- und Imaginärteil aufgespalten werden:

$$R_m(\omega) = d_o + 2 \sum_{k=1}^{M} g_k \cdot \cos(k\omega T) \qquad (2.9)$$
$$X_m(\omega) = 2 \sum_{k=1}^{M} u_k \cdot \sin(k\omega T)$$

Aus den Gleichungen (2.9) kann man ablesen, daß mit dem Transversalfilter Übertragungsfunktionen mit linearer Phase realisiert werden können:

$u_k = 0$ für alle k ergibt

$$H(j\omega) = e^{-j\omega MT} \cdot R_m(\omega).$$

$d_o = 0$ und $g_k = 0$ für alle k ergibt

$$H(j\omega) = j \cdot e^{-j\omega MT} \cdot X_m(\omega).$$

In diesem Fall entsteht also eine zusätzliche 90° - Phasendrehung.

2.3 Das Transversalfilter als kausales System

Die mit Gl. (2.7) definierte, auf die Mitte des Transversalfilters bezogene Übertragungsfunktion $H_m(j\omega)$ ist nichtkausal. Kausalität erfordert $d_{-k} = 0$ für $k = 1,2,\ldots M$. Dann ergibt sich aus den Gleichungen (2.8) und (2.9)

$$d_k = 2\, g_k = -\, 2\, u_k \qquad (2.10)$$

und

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \sum_{k=0}^{N} d_k \cdot \cos k\omega T \\ X(\omega) &= -\sum_{k=0}^{N} d_k \cdot \sin k\omega T, \end{aligned} \qquad (2.11)$$

wenn der Einstellkoeffizient d_o wieder am Eingang des Transversalfilters liegt und N die Zahl der Laufzeitglieder bezeichnet (s. Abb. 1).

Aus den Gleichungen (2.11) geht hervor, daß mit den Einstellkoeffizienten d_k sowohl der Real- als auch der Imaginärteil der Übertragungsfunktion festliegt. $R(\omega)$ und $X(\omega)$ sind Hilbert-Transformierte zueinander (konjugierte Funktionen), d. h., es gilt:

$$jX(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot R\,(\omega) * \frac{2}{j\omega}$$

Wird der vorgegebene periodische Realteil $R(\omega)$ in eine cos-Reihe entwickelt, so kann der zugehörige Imaginärteil $X(\omega)$ sofort aus den Fourier-Koeffizienten d_k bestimmt werden.*

---

* Diese Bestimmung des Imaginärteils aus dem Realteil (oder umgekehrt) kann auch für nichtperiodische Übertragungsfunktionen durchgeführt werden, wenn die s-Ebene in die z-Ebene abgebildet wird (Wiener-Lee-Transformation).

2.4 Realisierungsmöglichkeiten

2.4.1 Zeitkontinuierliche Signalverarbeitung

Laufzeitglieder, die - den obigen Ableitungen entsprechend - als Impulsantwort einen um die Zeit T verzögerten δ-Impuls liefern und eine zeitkontinuierliche Signalverarbeitung des Transversalfilters zulassen,

$$u_a(t) = \sum_{k=0}^{N} d_k \cdot u_e(t - kT) \qquad \text{für alle } t,$$

sind nur näherungsweise realisierbar, so z. B. mit angezapften Leitungen oder mit Allpässen. Transversalfilter, die mit solchen Laufzeitgliedern aufgebaut sind, können aus dem Spektrum $U_e(j\omega)$ des Eingangssignals gewisse, symmetrisch zu $\omega = k \cdot 2\pi/T$ ($k = 0,1,2,\ldots$) liegende Bereiche "kammartig" herausfiltern (Kammfilter, z. B. in der Radartechnik). Soll mit dem Transversalfilter eine Übertragungsfunktion gebildet werden, zu der eine zeitkontinuierliche Impulsantwort gehört, so muß mit einem dem Transversalfilter vor- oder nachgeschalteten Tiefpaß eine Bandbegrenzung des Signals vorgenommen werden.

Die Periodizität der Übertragungsfunktion ist durch den Wert $\Omega = 2\pi/T$ (T=Laufzeit zwischen benachbarten Anzapfungen) gegeben. Durch Verringerung dieser Laufzeit wird das Periodizitätsintervall vergrößert. Im Grenzfall ergibt sich bei kontinuierlich verteilten Anzapfungen eine nichtperiodische Übertragungsfunktion (CTT-Filter = continuously tapped transversal filters, s. z. B. /5/).

2.4.2 Zeitdiskrete Signalverarbeitung

Anwendungsfälle, in denen die Periodizität der Übertragungsfunktion des Transversalfilters ausgenutzt werden kann, sind relativ selten. Im allgemeinen besteht die Aufgabe, das Spektrum eines bandbegrenzten Signals,

$$U_e(j\omega) = 0 \qquad |\omega| > \omega_g$$

mittels des Filters zu verändern.

Nach dem Abtasttheorem kann eine bandbegrenzte Zeitfunktion $u_e(t)$ aus ihren diskreten Werten an den Stellen $t = n\pi/\omega_g$ dargestellt werden. Wird die Laufzeit zwischen jeweils zwei Anzapfungen des Transversalfilters zu

$$T = \frac{\pi}{\omega_g}$$

gewählt, so entsteht durch die Abtastung der Eingangs-Zeitfunktion $u_e(t)$ die Distribution

$$u_{e*}(t) = \sum_{(n)} u_e(nT) \cdot \delta(t - nT) \tag{2.12}$$

An den Anzapfungen erscheinen nur zu den Abtastzeitpunkten Signalanteile, die - nach Bewertung mit den Einstellkoeffizienten und anschließender Summation - die Ausgangs-Abtastfolge

$$u_{a*}(t) = \sum_{(n)} u_a(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

bilden. Aus dem Spektrum dieser Abtastfolge,

$$U_{a*}(j\omega) = \sum_{(n)} u_a(nT) \cdot e^{-j\omega nT} \tag{2.13}$$

kann der interessierende Grundbereich $U_a(j\omega)$ mittels eines idealen Tiefpasses wiedergewonnen werden:

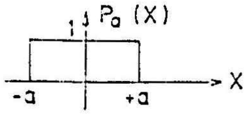


Abb 5 Def. von $p_a(x)$

$$U_a(j\omega) = T \cdot U_{a*}(j\omega) \cdot p_{\omega g}(\omega)$$

Auf diese Weise wird die Ausgangsfunktion $u_a(t)$ mit der Kardinalreihe

$$u_a(t) = \sum_{(n)} u_a(nT) \cdot \mathrm{si}[\pi\,(t/T - n)]$$

aus den Abtastwerten $u_a(nT)$ rekonstruiert. *

---

* Def. von si x: si x = sin x / x.

2.4.2.1 Abtastfilter

Wie aus den Gleichungen (2.12) und (2.13) hervorgeht, werden bei zeitdiskreter Signalverarbeitung nur zu den Zeitpunkten (nT) Abtastwerte miteinander verknüpft. Daher können die Laufzeitglieder durch Analog-Speicherzellen ersetzt werden, die die Abtastwerte $u_e(nT)$ wertekontinuierlich speichern und den jeweils gespeicherten Wert zu den Taktzeiten an die folgende Zelle weitergeben. Mit Abtast-Haltegliedern können daher mit einfachen Mitteln nichtrekursive und rekursive Verzweigungsnetzwerke (Abtastfilter) aufgebaut werden (/6,7/, s. auch Abschnitt 6).

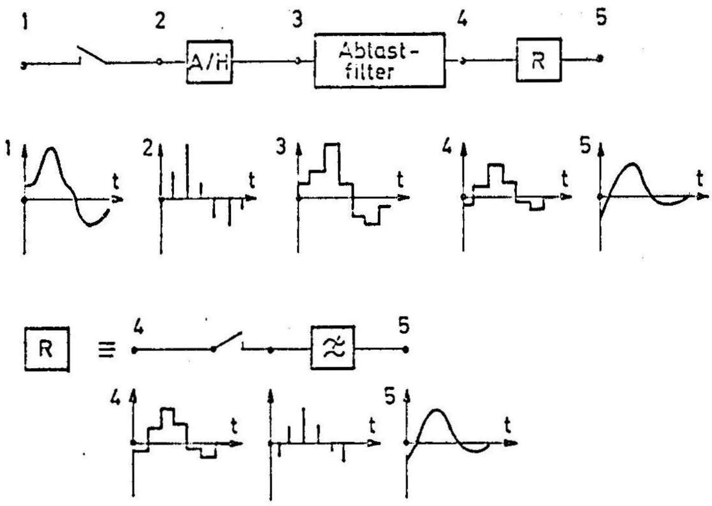


Abb. 6 Signalfilterung mit dem Abtastfilter

Die durch die Haltekreise nullter Ordnung hervorgerufene Verlängerung der Abtastwerte auf T bedingt einen zusätzlichen Frequenzgang

$$H_H(j\omega) = T \cdot si\ (\omega T/2) \cdot e^{-j\omega T/2}$$

Die betragsmäßige Verfälschung kann durch geeignete Abänderung der Einstellkoeffizienten (s. Abschnitt 3.3) oder durch Nachabtastung des Treppensignals

$$u_{Tr}(t) = u(nT) \qquad nT \leq t \leq (n + 1)T$$

verhindert werden (s. Abb. 6 b).

2.4.2.2 Digitale Filter

Digitale Filter führen eine zeit- und wertediskrete Signalverarbeitung durch. Dazu wird die Eingangs-Abtastfolge $u_{e*}(t)$ durch Quantisierung und Codierung in eine Zahlenfolge umgewandelt, die dann im Rechner gemäß einem durch ein Programm festgelegten Algorithmus in eine andere Wertefolge übergeführt wird (z. B. /8/). Entspricht der Algorithmus einer Transversalfilter-Struktur, so wird aus jeweils (N + 1) gespeicherten Zahlen durch (N + 1) Multiplikationen mit den Faktoren d_k $(k = 0,1,2,\ldots N)$ und anschließender Summation ein neuer Zahlenwert der Ausgangs-Zahlenfolge ermittelt.

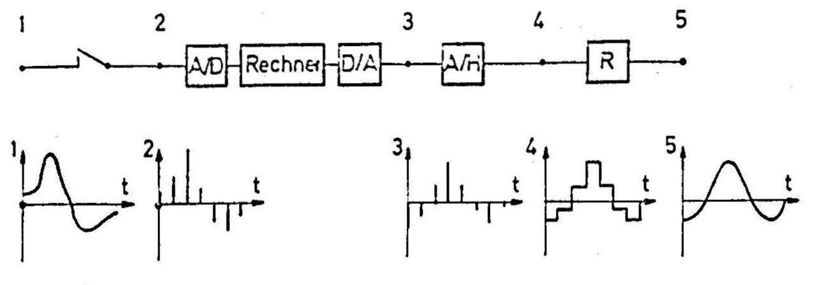


Abb.7 Signalfilterung mit dem Digital-Filter

Neben dieser rein digitalen Realisierung gibt es auch Anordnungen, in denen das quantisierte und codierte Signal in digitalen Schieberegistern verzögert wird, während die Bewertung über Widerstände vorgenommen wird, die dann gleichzeitig einen Teil der D/A - Umwandlung übernehmen /9/.

3. Die Approximation vorgegebener Übertragungsfunktionen mit Transversalfiltern

3.1 Approximation im gesamten Periodizitätsintervall

Die Übertragungsfunktion des Transversalfilters,

$$(3.1) \qquad H_m(jx) = \sum_{K=-M}^{+M} d_k \cdot e^{-jkx}$$

$$\text{mit} \qquad x = \omega \cdot T,$$

ist eine periodische Funktion.

$H_m(jx)$ soll eine vorgegebene Übertragungsfunktion $H_v(jx)$ so approximieren, daß der Approximationsfehler $|H_m(jx) - H_v(jx)|$ möglichst klein wird.

Ist die vorgegebene Übertragungsfunktion bandbegrenzt,

$$H_v(jx) = 0 \qquad |x| > x_g \ ,$$

so kann $H_v(jx)$ periodisch fortgesetzt werden und ist damit durch eine Fourierreihe darstellbar:

$$H_{vp}(jx) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cdot e^{-jkx} \tag{3.2}$$

Die C_k - Werte sind die reellwertigen Fourierkoeffizienten der periodischen Funktion $H_{vp}(jx)$; vgl. Fußnote auf S. 5:

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} H_{vp}(jx) \cdot e^{+jkx} dx \tag{3.3}$$

Wird $H_{vp}(jx)$ durch die Übertragungsfunktion $H_m(jx)$ des Transversalfilters approximiert, so entsteht der Fehler

$$\begin{aligned} H_\Delta(jx) &= H_{vp}(jx) - H_m(jx) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \cdot e^{-jkx} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A_k &= C_k - d_k \qquad & |k| \leq M \\ A_k &= C_k \qquad & |k| > M \end{aligned}$$

Aus dem mittleren quadratischen Fehler der periodischen Funktion $H_\Delta(jx)$,

$$\begin{aligned} E &= \overline{H_\Delta(jx) \cdot H_\Delta{}^*(jx)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} H_\Delta(jx) \cdot H_\Delta{}^*(jx) dx \end{aligned} \tag{3.4}$$

folgt mit dem Parseval-Theorem* für komplexe periodische Funktionen sofort

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k{}^2 \\ &= \sum_{k=-M}^{+M} (C_k - d_k)^2 + \sum_{|k|>M} C_k{}^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

---

* $E = \overline{f(t) \cdot f^*(t)} = \sum_{(k)} F_k \cdot F_k{}^*$; F_k = k.te Harmonische

Der minimale Fehler ergibt sich für

$$(3.6) \qquad d_k = C_k \qquad |k| \leq M \, ,$$

also dann, wenn die Einstellkoeffizienten den Fourier-Koeffizienten der Entwicklung von $H_{vp}(jx)$ gleichgesetzt werden /3, 4, 9/.

Die Begrenzung auf $\pm$ M Koeffizienten bewirkt einen Fehler

$$E_{min} = \sum_{|k|>M} C_k{}^2 \qquad \text{für } d_k = C_k \quad (|k| \leq M)$$

Die trigonometrische Interpolation gemäß Gl. (3.6) zeigt bekanntlich eine sehr schlechte Konvergenz, wenn die Übertragungsfunktion Unstetigkeitsstellen besitzt. Ist die k.te Ableitung der Übertragungsfunktion impulsförmig, so nehmen die Amplituden der Impulsantwort bei großen t - Werten proportional zu $|t|^{-k}$ ab. Die durch die endliche Zahl von Einstellkoeffizienten bedingte Zeitbegrenzung der Impulsantwort führt zu einer Faltung von $H_v(jx)$ mit einer si-Funktion (Gibbsches Phänomen):

$$h(t) \cdot p_{MT}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; H_v(jx) * \frac{MT}{\pi} \cdot si(xM)$$

(Definition von $p_a(t)$, s. Abb. 5).

Bessere Lösungen ergeben sich, wenn $p_{MT}(t)$ durch andere "Fenster"-Funktionen ersetzt wird (s. z. B. /8/), oder wenn eine geeignete Bewertung des mittleren quadratischen Fehlers im Definitionsbereich der Übertragungsfunktion $H_v(jx)$ vorgenommen wird (s. nächsten Abschnitt).

3.2 Approximation in Teilbereichen des Periodizitätsintervalls

Die trigonometrische Approximation liefert Koeffizienten derart, daß der mittlere quadratische Fehler im gesamten Periodizitätsintervall ein Minimum wird; die Einstellkoeffizienten sind dann mit den Fourierkoeffizienten der periodisch fortgesetzten vorgegebenen Übertragungsfunktion identisch.

Oft ist jedoch nur eine gute Approximation in Teilbereichen des Periodizitätsintervalls gewünscht, während der Fehler in den übrigen Gebieten durchaus größer oder aber auch beliebig sein kann. Solche Bereiche entstehen z. B., wenn bei Filtern mit zeitdiskreter Signalverarbeitung die halbe Abtastfrequenz größer ist als die höchste Signalfrequenz.

Wird der mittlere quadratische Fehler als Kriterium für die Güte der Approximation beibehalten, so gilt:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} B(jx) \cdot H_{\Delta}(jx) \cdot H_{\Delta}^{*}(jx)\,dx \tag{3.7}$$

$$\stackrel{!}{=} \text{Min.}$$

Die Bewertungsfunktion $B(jx)$ ist 1 im interessierenden Bereich (Approximationsintervall). Weiter gilt:

$$B(-jx) = B(jx) = B(x),$$

d. h., die Bewertungsfunktion ist eine reelle Funktion.

An dieser Stelle sei noch vermerkt, daß auch ein anderes Kriterium für die Güte der Approximation eingeführt werden könnte, z. B. die Tschebyscheff-Approximation; sie ist dadurch gekennzeichnet, daß die Extrema der Fehlerfunktion $E(x)$ im Approximationsintervall dem Betrage nach gleich werden, und daß die Vorzeichen dieser Extremwerte an aufeinanderfolgenden Abzissen alternieren. Das Tschebyscheff-Kriterium führt i. a. auf ein nichtlineares Gleichungssystem, das mit einem Iterationsverfahren gelöst werden muß. Die Approximation im Tschebyscheffschen Sinne hat den Vorzug, daß die Größe des maximalen Fehlers genau bekannt ist; ansonsten sind die Unterschiede zur Approximation im Sinne des kleinsten mittleren Fehlerquadrates nicht sehr groß /10/. Hier wird auf eine Diskussion der Tschebyscheff-Approximation verzichtet, da ihr Fehler-Kriterium beim Analogverfahren nur bei großem Aufwand verwendet werden kann.

Das Minimisierungsproblem kann auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems der Ordnung (2M + 1) zur Bestimmung der gesuchten (2M + 1) Einstellkoeffizienten zurückgeführt werden.

Die Aufstellung dieses Gleichungssystems wurde bereits von Fleischer durchgeführt /11/. Da dem im Abschnitt 5 beschriebenen Analogverfahren zur Bestimmung der Einstellkoeffizienten die hier diskutierte Approximationsmethode zugrunde liegt, wird hier die Aufstellung des Gleichungssystems nochmals - in etwas anderer Form - vorgenommen; dabei werden auch nichtkausale Impulsantworten zugelassen; diese Schreibweise läßt dann eine Aufteilung in zwei Gleichungssysteme der Ordnung (M + 1) bzw. (M) zu, wenn Koeffizienten von -M bis +M bestimmt werden sollen.

Der mittlere quadratische Fehler der Approximation hat den Wert

$$E = E(d_{-M}, d_{-M+1}, \dots d_{-1}, d_o, d_1, \dots d_M)$$

$$(3.8) \qquad = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} B \cdot \left| H_{vp} - \sum_{K=-M}^{+M} d_k \cdot e^{-jkx} \right|^2 dx$$

Nach kurzer Zwischenrechnung ergibt sich mit

$$\begin{aligned} H_{vp}(jx) &= H_v(jx) \\ &= R_v(x) + jX_v(x) \qquad |x| \leq \pi \end{aligned}$$

die Gleichung

$$(3.9) \qquad E = I_E - 2\sum_{(K)} d_k \cdot I_F(k) + \sum_{(K)} \sum_{(l)} d_k \cdot d_l \cdot I_B(k-l)$$

mit der Energie

$$I_E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} B \cdot (R_v^2 + X_v^2)\, dx,$$

den verallgemeinerten Fourierkoeffizienten

$$(3.10) \qquad I_F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} B \cdot (R_v \cdot \cos kx - X_v \cdot \sin kx) dx$$

und dem Bewertungs-Term

$$(3.11) \qquad I_B\,(k-l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} B \cdot \cos\,(k-l)x\, dx$$

Die Parameter d_i müssen so bestimmt werden, daß die Fehlerfunktion nach Gl. (3.9) zu einem Minimum wird. Die notwendige Bedingung

$$\frac{\partial E}{\partial d_i} = 0 \qquad i = -M, -M+1, \ldots, M-1, M$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{K=-M}^{+M} d_k \cdot I_B(i-k) = I_F(i) \qquad i = -M, -M+1, \ldots, M-1, M \tag{3.12}$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich in Matrizenform schreiben:

$$\begin{pmatrix} I_B(0) & I_B(1) & I_B(2) & \ldots I_B(2M) \\ I_B(1) & I_B(0) & I_B(1) & \ldots I_B(2M-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I_B(2M) & I_B(2M-1) & I_B(2M-2) & \ldots I_B(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{-M} \\ d_{-M+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ d_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_F(-M) \\ I_F(-M+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ I_F(+M) \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbb{B} \cdot \mathbb{D} = \mathbb{F}$$

Die Koeffizienten der Hauptdiagonalen der symmetrischen Matrix $\mathbb{B}$ stimmen mit dem Mittelwert der Bewertungsfunktion überein. Da alle Elemente der Matrix $\mathbb{B}$ von der zu approximierenden Übertragungsfunktion $\underline{H}_v(jx)$ unabhängig sind, kann der Lösungsvektor

$$\mathbb{D} = \mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{F} \tag{3.13}$$

bei mehrmaliger Durchrechnung mit verschiedenen Übertragungsfunktionen, aber gleichbleibender Bewertungsfunktion sehr schnell bestimmt werden, ohne daß jeweils die Inverse $\mathbb{B}^{-1}$ neu berechnet werden muß. Im Anhang werden die Elemente verschieden großer Kehrmatrizen für die Approximation von Fernsprechkanälen angegeben.

Es fehlt noch der Nachweis, daß das Gleichungssystem (3.12) eine eindeutige Lösung hat. Dazu muß die quadratische Form $\sum\sum d_k \cdot d_l \cdot I_B(k-l)$ positiv definit sein, d. h. positiv (>0) für beliebige reelle Werte der Variablen d_i, solange nicht alle Variablen gleichzeitig verschwinden. Da nun die Bewertungsfunktion eine gerade Funktion ist, läßt sich aus der Gl. (3.11) erkennen, daß alle Hauptabschnittsdeterminanten der symmetrischen Koeffizientenmatrix $\mathbb{B}$ positiv sind; damit ist die quadratische Form positiv definit, das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung, und der Lösungsvektor $\mathbb{D}$ nach Gl. (3.13) liefert ein Minimum der Fehlerfunktion. Der minimale quadratische Fehler der Approximation ergibt sich nach kurzer Rechnung* zu

$$E_{min} = I_E - \sum_{(k)} \sum_{(l)} d_k \cdot d_l \cdot I_B(k-l)$$

Im Sonderfall

$$B(x) = 1 \qquad \text{für alle } x$$

entsteht ein orthogonales System :

$$I_B(k-l) = \delta_{k,\,l} \qquad\qquad \delta_{k,\,l} \begin{cases} = 1 & k = l \\ = 0 & k \neq l \end{cases}$$

Die Matrix $\mathbb{B}$ wird zur Einheitsmatrix

$$\mathbb{I} \cdot \mathbb{D} = \mathbb{F}$$

und die Einstellkoeffizienten d_k können unabhängig voneinander aus dem k.ten Element des Spaltenvektors $\mathbb{F}$ bestimmt werden (Fourierlösung).

---

*Aus Gl. (3.9), $E = I_E - 2\mathbb{D}^T \cdot \mathbb{F} + \mathbb{D}^T \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{D}$, ergibt sich mit $\mathbb{B} \cdot \mathbb{D} = \mathbb{F}$ sofort $E_{min} = I_E - \mathbb{D}^T \mathbb{B} \mathbb{D}$.

Aufspaltung in 2 Gleichungssysteme

Das Gleichungssystem (3.12) kann durch Einführung von

$$d_k = g_k - u_k$$
$$d_{-k} = g_k + u_k$$
$$d_o = 2\, g_o$$

in zwei Gleichungssysteme der Ordnung (M+1) und (M) aufgespalten werden; aus Gl. (3.8) folgt:

$$(3.14) \qquad E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} B\cdot R_\Delta{}^2 dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} B\cdot X_\Delta{}^2 dx$$

$$= E_1(g_o,\ g_1,\ g_2,\ldots g_M) + E_2(u_1,\ u_2,\ldots u_M)$$

mit

$$R_\Delta = R_{vp} - 2\sum_{K=0}^{M} g_k\cdot \cos kx$$

$$X_\Delta = X_{vp} - 2\sum_{K=1}^{M} u_k\cdot \sin kx$$

Die notwendigen Bedingungen für einen minimalen Fehler E_{min},

$$\frac{\partial E}{\partial g_i} = \frac{\partial E_1}{\partial g_i} = 0 \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ldots M$$

$$\frac{\partial E}{\partial u_i} = \frac{\partial E_2}{\partial u_i} = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ldots M$$

führen auf

$$(3.15) \qquad I_{Fg}(i) = \sum_{K=0}^{M} g_k\cdot I_{Bg}(i,k)$$

und auf

$$(3.16) \qquad I_{Fu}(i) = \sum_{K=1}^{M} u_k\cdot I_{Bu}(i,k)$$

Es wurden folgende Abkürzungen benutzt:

$$I_{Fg}(i) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} B \cdot R_v \cdot \cos ix \, dx$$

$$I_{Fu}(i) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} B \cdot X_v \cdot \sin ix \, dx$$

$$I_{Bg}(i, k) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} B \cdot \cos ix \cdot \cos kx \, dx$$

$$I_{Bu}(i, k) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} B \cdot \sin ix \cdot \sin kx \, dx$$

Aus Gl. (3.15) bzw. aus Gl. (3.16) folgt mit

$$I_{Bg}(i, k) = I_{Bg}(k, i)$$

$$I_{Bu}(i, k) = I_{Bu}(k, i)$$

$$\begin{pmatrix} I_{Bg}(0,0) & I_{Bg}(0,1) & I_{Bg}(0,2) & \ldots & I_{Bg}(0,M) \\ I_{Bg}(0,1) & I_{Bg}(1,1) & I_{Bg}(1,2) & \ldots & I_{Bg}(1,M) \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ I_{Bg}(0,M) & I_{Bg}(1,M) & I_{Bg}(2,M) & \ldots & I_{Bg}(M,M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_o \\ g_1 \\ \cdot \\ g_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Fg}(0) \\ I_{Fg}(1) \\ \cdot \\ I_{Fg}(M) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_{Bu}(1,1) & I_{Bu}(1,2) & \ldots & I_{Bu}(1,M) \\ I_{Bu}(1,2) & I_{Bu}(2,2) & \ldots & I_{Bu}(2,M) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ I_{Bu}(1,M) & I_{Bu}(2,M) & \ldots & I_{Bu}(M,M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Fu}(1) \\ I_{Fu}(2) \\ \cdot \\ I_{Fu}(M) \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrizen sind wiederum unabhängig von den zu approximierenden Übertragungsfunktionen $H_v(jx)$; die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösungsvektoren der beiden Gleichungssysteme kann - analog zu der Diskussion der Gl. (3.12) - leicht gezeigt werden.

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde eine Bestimmung der Einstellkoeffizienten d_k im Bereich $-M \leq k \leq +M$ vorausgesetzt. Mit dem Gleichungssystem (3.12) können aber auch d_k - Werte in zum Koeffizienten d_o unsymmetrischen Bereichen $-M \leq d_k \leq +N$ bestimmt werden; die Koeffizienten $d_k (N \leq k \leq M)$werden dazu einfach zu Null gesetzt.

3.3 Berücksichtigung der Rekonstruktionsfehler

Wird ein Transversalfilter mit zeitdiskreter Signalverarbeitung zur Filterung zeitkontinuierlicher Signale eingesetzt, so entstehen bei der Rekonstruktion des Ausgangssignals aus der Ausgangs-Abtastfolge Fehler. Diese Fehler entstehen z. B. bei der Rekonstruktion mit Nachabtastung (s. Abb. 6) durch die endliche Länge der Ausblendimpulse und durch den Tiefpaß, dessen Verhalten nicht ideal sein kann. Durch Abänderung der Werte der Einstellkoeffizienten lassen sich diese Rekonstruktionsfehler eliminieren.

In Reihe zu dem Transversalfilter mit der Übertragungsfunktion $H_m(j\omega)$ liegt also jetzt ein Vierpol, der das Verhalten der Rekonstruktion beschreibt; seine Übertragungsfunktion sei $K(j\omega) = R_K(\omega) + jX_K(\omega)$. Die Einstellkoeffizienten müssen jetzt so bestimmt werden, daß

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} B \cdot \left| H_v - K \cdot \sum_{K=-M}^{+M} d_k e^{-jkx} \right|^2 dx$$

zum Minimum wird (s. auch /11/). Nach Rechnung ergibt sich wieder das Gleichungssystem (3.12), wenn die Gleichungen (3.10) und (3.11) durch

$$I_F(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} B \cdot \left[(R_v \cdot R_K + X_v \cdot X_K) \cdot \cos kx - (X_v R_K - R_v X_K) \cdot \sin kx \right] dx$$

$$I_B(k-1) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} B \cdot (R_K{}^2 + X_K{}^2) \cdot \cos (k-1)x \, dx$$

ersetzt werden.

4. Apparative Fouriertransformation mit dem Abtastfilter

Die mit einer bandbegrenzten Übertragungsfunktion verknüpfte Impulsantwort kann aus den Abtastwerten rekonstruiert werden:

$$h(t) = \sum_{(n)} h(nT) \cdot \mathrm{si}\left[\pi(t/T - n)\right] \tag{4.1}$$

Wird die Impulsantwort des Transversalfilters,

$$h_{TF}(t) = \sum_{(n)} d_n \cdot \delta(t - nT),$$

einem idealen Tiefpaß mit der Impulsantwort

$$h_{TP}(t) = \frac{1}{T} \cdot \mathrm{si}(\pi t/T)$$

zugeführt, so ergibt sich durch Faltung

$$h(t) = h_{TF}(t) * h_{TP}(t)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{(n)} d_n \cdot \mathrm{si}\left[\pi(t/T - n)\right] \tag{4.2}$$

Die Einstellkoeffizienten können also aus den Abtastwerten der Impulsantwort bestimmt werden (Vergleich von Gl. 4.1 mit 4.2):

$$d_n = T \cdot h(nT) \tag{4.3}$$

Aus den Symmetrie-Eigenschaften der Fourier-Transformierten,

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ H(j\omega)$$

$$H(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi h(-j\omega),$$

folgt nun eine Möglichkeit, die zu einer vorgegebenen Übertragungsfunktion gehörenden Einstellkoeffizienten zu gewinnen: die Einstellkoeffizienten werden zuerst so eingestellt, daß sie Abtastwerten der Übertragungsfunktion entsprechen; das Transversalfilter hat dann die Impulsantwort H(t). Es kann entweder der Real- oder der Imaginärteil eingestellt werden (X=0 oder R=0).

Über der Frequenz entsteht der Verlauf der Impulsantwort h, aus der (in äquidistanten Frequenzabständen) die Abtastwerte und damit (nach Gl. 4.3) die gesuchten Einstellkoeffizienten abgenommen werden können. Zur Messung der Abtastwerte muß dem Filter eine δ- Impulsfolge als Eingangssignal angeboten werden; die Abtastwerte werden dann mit einem selektiven Voltmeter gemessen. Eine elegantere Methode ergibt sich, wenn die Abtastfrequenz des Filters umschaltbar ist; durch Erhöhung der Abtastfrequenz können nacheinander die Amplituden der Harmonischen mit einem Bandpaß fester Mittenfrequenz herausgesiebt werden /12/.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß entweder der Real- oder der Imaginärteil der Übertragungsfunktion Null ist; das Abtastfilter gibt nun die Möglichkeit, diese Beschränkung fallenzulassen. An getrennten Koeffizientensätzen der gleichen Laufzeitkette werden die Koeffizienten entsprechend dem Verlauf des Real- bzw. Imaginärteils eingestellt. Die Amplituden der Harmonischen sind dann den g_k - bzw. u_k - Werten proportional (s. Gl. 2.9). Da sie gleichzeitig vorliegen, können die Einstellkoeffizienten d_k nach Gl. (2.8) am Ausgang eines Summierers abgenommen werden (inverse Fourier-Transformation).

5. Ein Analogverfahren zur Approximation vorgegebener Übertragungsfunktionen

5.1 Das Prinzip des Analogverfahrens

Zur Dämpfungsentzerrung von Leitungen wurde 1953 von den Bell-Laboratorien ein Meßverfahren angegeben, mit dem der dort verwendete Echoentzerrer in kurzer Zeit eingestellt werden konnte /13/. Dem Prinzip nach entspricht das Verfahren einem Abgleich der Dämpfungsentzerrungen auf kleinstes Fehlerquadrat.

Die Einstellung eines Transversalfilters, das eine komplexe Übertragungsfunktion $H_V(jx) = R_V(x) + jX_V(x)$ nachbilden soll, kann nach dem gleichen Prinzip erfolgen, wenn Real- und Imaginärteil von $H_V(jx)$ in Funktionsgebern vorliegen.*

Die gewünschte Übertragungsfunktion $H_V(jx)$ wird über einer zeitlinearen Spannung U_1 als Real- und Imaginärteil in Diodenfunktionsgebern eingestellt. Am Transversalfilter liegt eine Wechselspannung an, deren Frequenz der Steuerspannung U_1 proportional ist. Die durch die Einstellung der Koeffizienten d_k festliegende Übertragungsfunktion $H_T(jx)$ des Transversalfilters wird in Real- und Imaginärteil aufgeteilt und mit den entsprechenden Werten von $H_V(jx)$ verglichen.

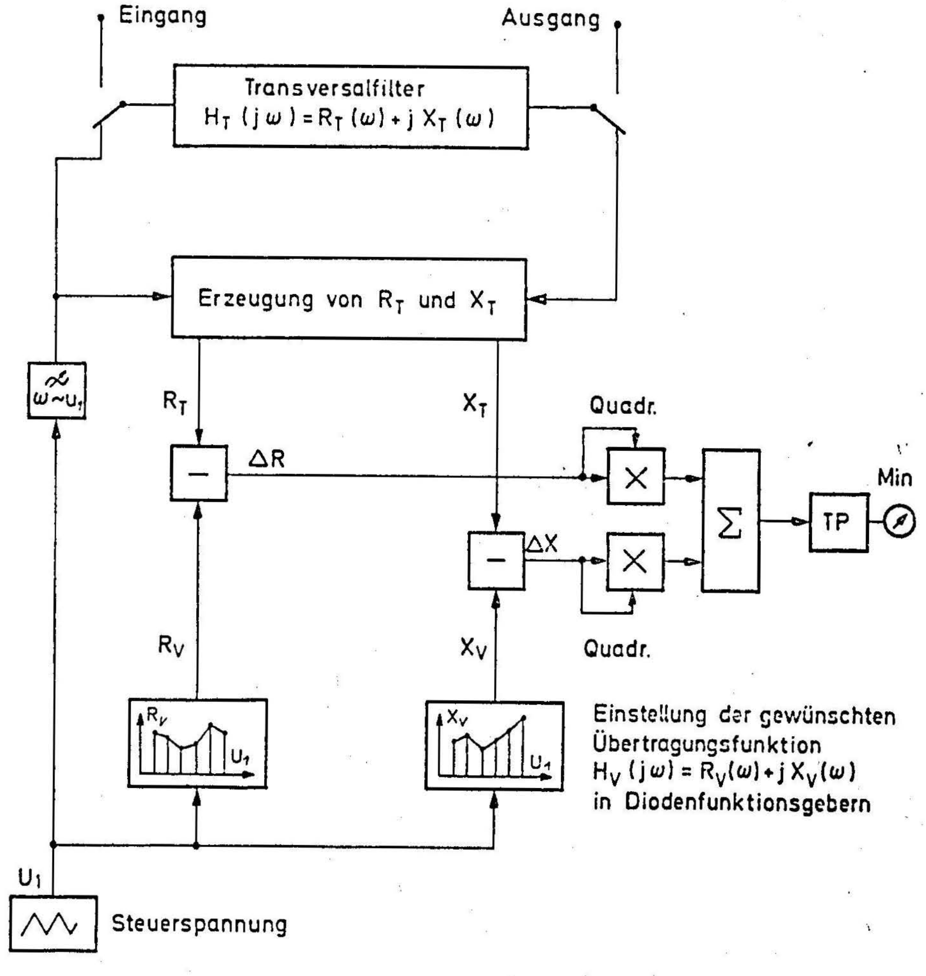


Abb. 8 Analogverfahren zur Einstellung eines Transversalfilters.

* nach einem Vorschlag von Dr. B. Wendland (früher Heinr.-Hertz-Inst., jetzt AEG-Telefunken Ulm).

Bei hinreichend großer Wobbelfrequenz kann der Mittelwert der Fehlerfunktion (s. Gl. 3.4) von einem Drehspulinstrument gebildet und angezeigt werden. Mit

$$\begin{aligned} H_\Delta(jx) &= H_V(jx) - H_T(jx) \\ \Delta R(x) &= R_V(x) - R_T(x) \\ \Delta X(x) &= X_V(x) - X_T(x) \end{aligned}$$

gilt:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_\Delta(jx) \cdot H_\Delta{}^*(jx)dx$$

(5.1)

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left[\Delta R^2(x) + \Delta X^2(x)\right] dx$$

Die Einstellkoeffizienten können von Hand oder automatisch so eingestellt werden, daß die Fehlerfunktion zum Minimum wird.

5.2 Die Konvergenz des Abgleichverfahrens

$H_\Delta(jx)$ ist eine periodische komplexe Funktion. Mit dem Parseval-Theorem für komplexe periodische Funktionen folgt aus Gl. (5.1)

$$E = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} (C_k - d_k)^2 \qquad (5.2)$$

Die C_k - Werte sind die Fourier-Koeffizienten der vorgegebenen Funktion. Die Einstellkoeffizienten nähern sich also beim Abgleichverfahren monoton den Fourier-Koeffizienten (vgl. Abschnitt 3.1).

Die Gleichung (5.1) gibt den mittleren quadratischen Fehler im gesamten Periodizitätsintervall ($|x| \leq \pi$) an, d. h., beim Abgleich mit dem Analogverfahren müßte der Frequenzbereich von 0 Hz bis zur halben Abtastfrequenz (= 1/2T) durchgewobbelt werden. Im Abschnitt 5.4.2 wird gezeigt, daß der mittlere quadratische Fehler praktisch nur in einem eingeschränkten Intervall des Übertragungsbereichs des Transversalfilters ($f_u > 0$; $f_o < 1/2T$) bestimmt werden kann.

Es wird also eine Bewertung derart vorgenommen, daß der Fehler für Frequenzen

$f < f_u$ (bzw. $x < x_u$) und $f > f_o$ (bzw. $x > x_o$) beliebige

Werte annehmen kann:

$$(5.3) \qquad E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} B(x) \cdot H_{\Delta}(jx) \cdot H_{\Delta}^{*}(jx)\,dx$$

$$B(x) = 1 \qquad x_u \leq x \leq x_o$$

$$B(x) = 0 \qquad \text{sonst}$$

Im Abschnitt 3.2 wurde gezeigt, daß die Bestimmung der Einstellkoeffizienten, die die obige Fehlerfunktion zum Minimum machen, die Auflösung eines linearen Gleichungssystems erfordert; damit sind die Einstellkoeffizienten voneinander abhängig.

Aus der Gl. (5.3) kann die Gl. (3.9) abgeleitet werden; sie läßt eine geometrische Deutung des Iterationsverfahrens zu. Die Funktionen E = const. bilden eine Ellipsoidenschar im $(2M+1)$-dimensionalen Raum, wenn Koeffizienten von $-M$ bis $+M$ abzugleichen sind. Die Drehung der Hauptachsen der Ellipsoide wird alleine durch den Verlauf der Bewertungsfunktion $B(x)$ festgelegt. Ist $B(x) = 1$ im gesamten Bereich $(0 \leq |x| \leq \pi)$, so liegen die Hauptachsen parallel verschoben zu den Koordinatenachsen. Der Mittelpunkt und die Größe der Hauptachsen werden sowohl durch die zu approximierende Übertragungsfunktion als auch durch $B(x)$ festgelegt. Wird E kleiner, so ziehen sich die Ellipsoide auf den gemeinsamen Mittelpunkt zusammen, der der Lösungsvektor ist. Die Darstellung der Funktionen über E ergibt einen Trichter über einer $(2M+1)$-dimensionalen Hyperebene. Das absolute Minimum der Fehlerfunktion E ist durch die Spitze des Trichters eindeutig bestimmt. Der Abgleich auf kleinstes mittleres Fehlerquadrat bewirkt eine Wanderung entlang der Trichterwand zur Trichterspitze hin.

Eine schnelle Konvergenz des Iterationsverfahrens kann durch eine geeignete Strategie des Einstellverfahrens erzielt werden; bei einem manuellen Abgleich ist praktisch jedoch nur eine einfache Abgleichmethode möglich:

es wird das partielle Minimum längs einer Variablen (d_k) gesucht, dann wird das Minimum längs der Variablen d_{k+1} gesucht, etc. Da die Einstellkoeffizienten voneinander abhängig sind, sind mehrere Umläufe über alle Variablen nötig. Es zeigt sich, daß das Verfahren mit dieser Strategie oft sehr schlecht konvergiert. Günstig ist es, mit dem Abgleich desjenigen Einstellkoeffizienten zu beginnen, der zu Beginn die größte Änderung des mittleren quadratischen Fehlers hervorruft.

5.3 Die Nachbildung kausaler und nichtkausaler Übertragungsfunktionen

Mit dem Transversalfilter können nichtkausale Übertragungsfunktionen dargestellt werden, wenn man eine zusätzliche Laufzeit zuläßt. Die vorgegebenen Übertragungsfunktionen sind meist kausal, die periodische Erweiterung erfordert jedoch, daß die Funktionen für $|x|>\pi$ zu Null gesetzt werden müssen. Nach dem Wiener-Paley-Kriterium sind die entstehenden Übertragungsfunktionen nichtkausal. Sie können - mit zusätzlicher Laufzeit - durch ein Transversalfilter mit Einstellkoeffizienten von d_{-M} bis d_{+N} nachgebildet werden; die Übertragungsfunktion des Systems sei dann definiert als Quotient der Ausgangsspannung und der um MT verschobenen Eingangsspannung, also der Spannung am Koeffizienten d_o. Beim Abgleichverfahren muß die Frequenz dieser Spannung der Steuerspannung U_1 der Diodenfunktionsgeber proportional sein.

5.4 Beschreibung der Schaltung

5.4.1 Die Erzeugung des Real- und Imaginärteils der Übertragungsfunktion des Transversalfilters

Die Spannung am 0.ten Koeffizienten ist die Bezugs-Eingangsspannung des Transversalfilters als nichtkausales System:

$$u_e = \sin \omega t$$

Dann ist die Ausgangsspannung

$$u_a = |H_T| \sin (\omega t + \varphi)$$

Durch Multiplikation des Eingangs- und Ausgangssignals erhält man:

$$u_R = u_e \cdot u_a$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |H_T| \cos\varphi - \frac{1}{2}|H_T| \cdot [\cos 2\omega t \cdot \cos\varphi + \sin 2\omega t \cdot \sin\varphi]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot R_T + f_1(2\omega t)$$

Der Realteil der Übertragungsfunktion läßt sich mit einem Tiefpaß eliminieren.

Durch Multiplikation des um 90^o gedrehten Eingangssignals mit dem Ausgangssignal erhält man

$$u_X = \frac{1}{2} \cdot |H_T| \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} \cdot |H_T| \cdot [\cos 2\omega t \cdot \sin\varphi + \sin 2\omega t \cdot \cos\varphi]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot X_T + f_2(2\omega t)$$

Der Imaginärteil läßt sich mit einem Tiefpaß eliminieren.

Eine 90° - Phasendrehung ohne Amplitudengang wird durch die Hilbert-Transformation beschrieben. Da das Transversalfilter die gleichzeitige Darstellung von mehreren Übertragungsfunktionen durch parallele Anzapfungen hinter den Laufzeitgliedern erlaubt, läßt sich die Hilbert-Transformierte durch das gleiche Transversalfilter bilden, wenn nur der 0.te Koeffizient der gewünschten Übertragungsfunktion an dem selben Laufzeitglied liegt wie der 0.te Koeffizient der Hilbert-Transformation.

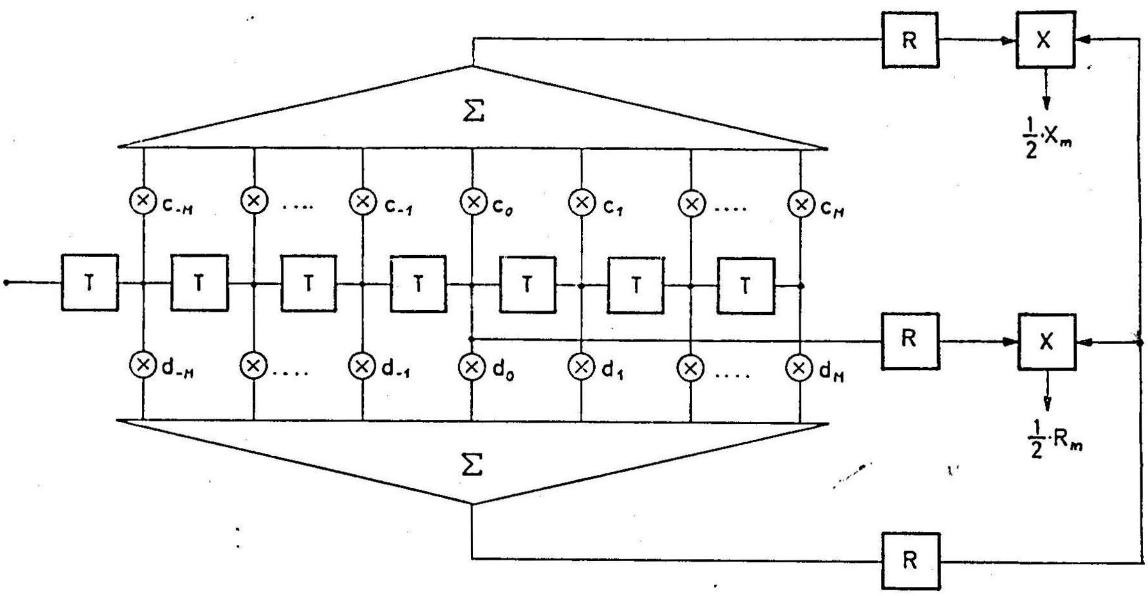


Abb. 9 Erzeugung des Imaginäranteils mittels Hilbert-Transformation.

Die Nachbildung von Fernsprechkanälen (300 Hz $\leq$ f $\leq$ 3400 Hz) erfordert nur eine Approximation in einem Teilbereich des Übertragungsbereiches des Transversalfilters. Die Hilbert-Transformation läßt sich dann mit großer Genauigkeit bilden /14/.

Da zur Bildung des Real- und Imaginärteils der Übertragungsfunktion des Transversalfilters Tiefpässe erforderlich sind, kann die 90^{o} - Drehung des Eingangssignals auch durch Differentiation oder Integration mit anschließender Umformung des Signals in ein Rechtecksignal konstanter Amplitude gebildet werden (s. auch Abb. 10):

$$u_{eR} = \sum_{(m)} \frac{\cos m\omega t}{m} \qquad m = 2 \cdot n-1; \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$u_{eR} \cdot u_a = \sum_{(m)} \frac{\cos m\omega t}{m} \cdot |H_T| \cdot (\sin \omega t \cdot \cos\varphi + \cos \omega t \cdot \sin\varphi)$$

Nach kurzer Zwischenrechnung folgt:

$$u_{eR} \cdot u_a = \frac{1}{2} \cdot X_T + f(m \cdot 2\omega t)$$

5.4.2 Die Realisierung des Analogverfahrens

Die Frequenz der Eingangsspannung des Transversalfilters verläuft proportional der zeitlinearen periodischen Steuerspannung U_1. Die Steuerspannung der Diodenfunktionsgeber muß um $(M+1) \cdot T$ gegenüber dieser Spannung verschoben werden, wenn Koeffizienten d_k im Bereich $-M \leq k \leq +N$ eingestellt werden sollen. Die zeitliche Verschiebung kann über (M+1) Abtast-Halteglieder mit anschließender Glättung erfolgen.

Die Fehlerfunktion wird aus den Differenzen ΔR und ΔX gebildet. Da die ihnen entsprechenden Spannungen bei fortschreitendem Abgleich sehr klein werden, würde die nach dem Quadrieren und Summieren entstehende Gesamtspannung so klein werden, daß sie nicht mehr als Fehlerkriterium ausgenutzt werden könnte. Um einen genauen Abgleich zu erreichen, muß die Quadratwertbildung daher durch eine Absolutwertbildung ersetzt werden (s. auch Abschnitt 6, Beispiel 2 = Tiefpaßcharakteristik).

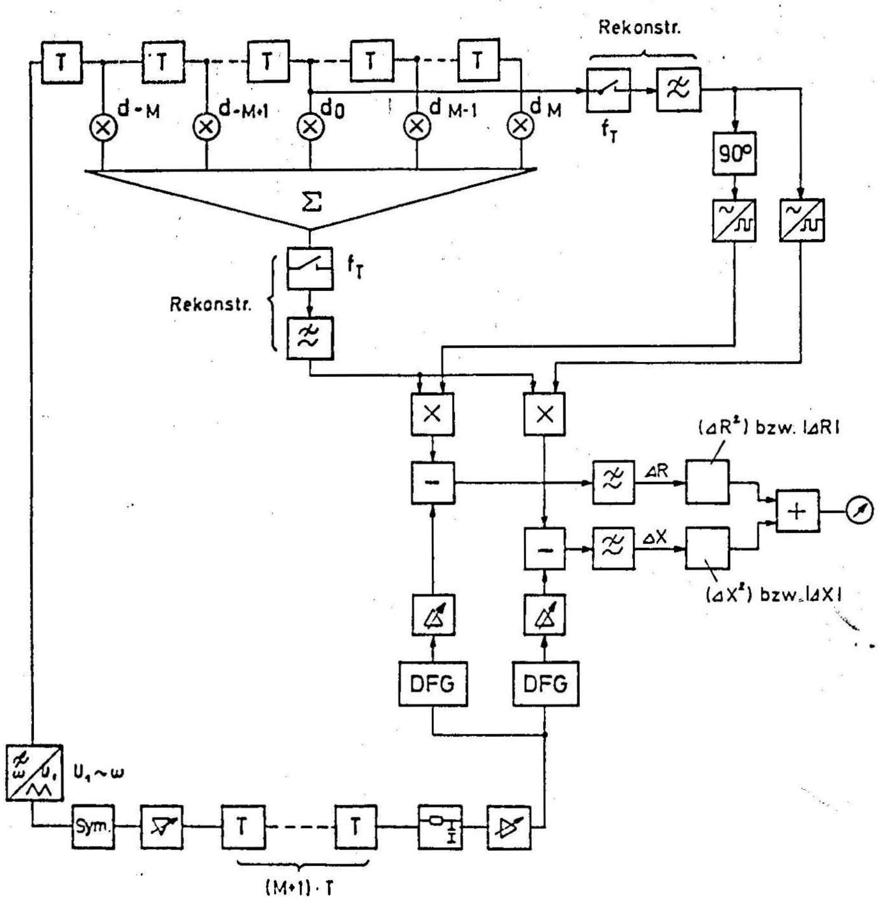


Abb. 10 Blockschaltbild des verwendeten Analogverfahrens.

Die Abtastfrequenz der Abtast-Halteglieder des Filters wurde zu 10 kHz gewählt. Zur Rekonstruktion der abgetasteten Signale (am 0.ten Koeffizienten und am Ausgang) wurden Tiefpässe mit einer Grenzfrequenz von 3.5 kHz verwendet; ihre Welligkeit im Durchlaßbereich war $<$ 0.3 dB. Die Wobbelfrequenz von 27 Hz ermöglichte eine sofortige Anzeige der mit dem Einstellen eines Einstellkoeffizienten verknüpften Änderung der Fehlerfunktion. Die Tiefpässe zur Bildung des Real- und Imaginärteils müssen eine Grenzfrequenz haben, die oberhalb der Wobbelfrequenz liegt. Die Tiefpässe hatten eine Grenzfrequenz von 200 Hz, so daß der Approximationsbereich, in dem der Mittelwert der Fehlerfunktion gebildet werden konnte, auf 200 Hz $\leq$ f $\leq$ 3500 Hz beschränkt war.

Die gewünschte Übertragungsfunktion $H_V(jx) = R_V(x) + jX_V(x)$ liegt aus meßtechnischen Gründen meist als Betrags- und Phasenverlauf vor. Da der zugehörige Real- und Imaginärteil durch eine Rechenschaltung mit sin- und cos-Funktionsgebern erzeugt werden kann, ist es möglich, den Betrag und die Phase in Diodenfunktionsgebern einzustellen.

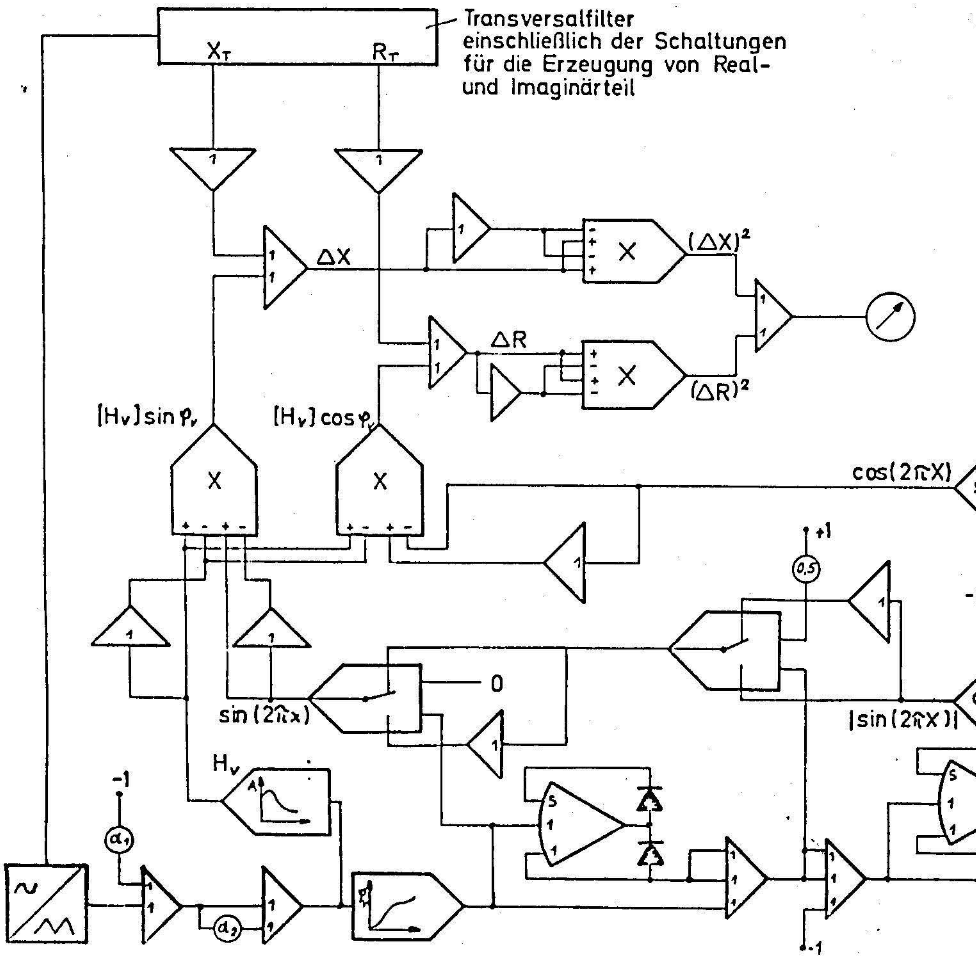


Abb. 11
Rechenschaltung zur Simulation des Abgleichverfahrens auf dem Analogrechner.

Abgleich nach Betrag und Phase:

Andererseits ist es aber auch möglich, den Abgleich mittels Vergleichs des Betrages und der Phase von vorgegebener Funktion (H_T , φ_T) vorzunehmen. Aus der Fehlerfunktion nach Gl. (5.1) folgt nach kurzer Rechnung:

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |H_T|^2 + |H_V|^2 - 2\, |H_T| \cdot |H_V| \cdot \cos\,(\varphi_V - \varphi_T) dx$$

Die notwendige Bestimmung des Phasenwinkels φ_T läßt bei diesem Verfahren nur kleine Wobbelgeschwindigkeiten zu, da der Mittelwert des pulsweitenmodulierten Phasensignals großen Wobbelgeschwindigkeiten bzw. schnellen Phasenänderungen nicht zu folgen vermag. Damit kann der Mittelwert der Fehlerfunktion nicht mehr durch ein Anzeigeinstrument gebildet werden. Wird es durch einen Integrierer ersetzt, ist keine kontinuierliche Einstellung der Koeffizienten mehr möglich, da der Integrier-Kondensator zwischen den Anzeigen Zeit zum Entladen benötigt. Damit ist die schaltungstechnische Realisierung der Fehlerfunktion in Abhängigkeit von Betrag und Phase trotz kleinerem Aufwand nur bedingt brauchbar.

Fehlerabgleich bezüglich der durch das Eingangssignal des Transversalfilters festgelegten Übertragungsfunktion

Der bezüglich der Spannung am 0.ten Koeffizienten d_o nichtkausalen Übertragungsfunktion kann eindeutig eine Übertragungsfunktion zugeordnet werden, die als Quotient der Ausgangs- zu Eingangsspannung definiert ist und damit kausal sein muß. Bei kausalen Funktionen ist der Imaginärteil durch den Realteil nach Gl. (2.11) festgelegt. Damit könnte ein Abgleich allein mit dem Kriterium der Differenz der Realteile vorgenommen werden, wenn die in den Funktionsgebern eingestellte Übertragungsfunktion mit analogen Rechenelementen auf den Eingang umgerechnet wird:

$$H_v(jx) = R_v(x) + jX_v(x)$$

$$H_{v(ein)}(jx) = H_v(jx) \cdot e^{jMx}$$

$$= R_v(x)\cos Mx - X_v(x)\sin Mx + j(R_v(x)\sin Mx + X_v(x)\cos Mx)$$

Um den Realteil dieser Übertragungsfunktion $H_{v(ein)}(jx)$ zu erzeugen, müssen also weiterhin sowohl der Real- als auch der Imaginärteil in Funktionsgebern vorgegeben werden.

Da zudem eine Multiplikation mit cos Mx bzw. sin Mx erforderlich ist, wird der schaltungstechnische Aufwand nicht kleiner.

5.5 Simulation des Transversalfilters auf dem Analogrechner

Zu Beginn der Untersuchung des Analog-Abgleichverfahrens wurde auch das Transversalfilter auf dem Analogrechner simuliert, um eine Übersicht über die Brauchbarkeit und Genauigkeit des Verfahrens zu gewinnen.

Die Übertragungsfunktion eines Transversalfilters mit Koeffizienten d_k im Bereich $-M \leq d_k \leq +N$ wird durch

$$H_T(jx) = \sum_{K=-M}^{+N} d_k \cdot e^{-jkx}$$

beschrieben. Die direkte Bestimmung der Einstellkoeffizienten d_k erfordert damit die Simulation der Übertragungsfunktion $\exp(-jkx)$; sie läßt sich in eine McLaurin-Reihe entwickeln und in einer kanonischen Form darstellen. Bei einer genauen Approximation wird der Aufwand zur schaltungstechnischen Realisierung erheblich.

Die Simulation wird sehr viel einfacher, wenn auf die Forderung, daß die d_k - Werte direkt einzustellen sind, verzichtet wird, und wenn stattdessen die g_k - und u_k - Werte getrennt eingestellt werden:

$$\begin{aligned} d_k &= g_k - u_k \\ d_{-k} &= g_k + u_k \end{aligned} \qquad (-M \leq d_k \leq +M)$$

Die Übertragungsfunktion

$$H_T(jx) = d_o + 2\sum_{K=1}^{M} (g_k \cdot \cos kx + j \cdot u_k \cdot \sin kx)$$

kann auf dem Analogrechner leicht dargestellt werden, wenn sie in Real- und Imaginärteil nachgebildet wird.

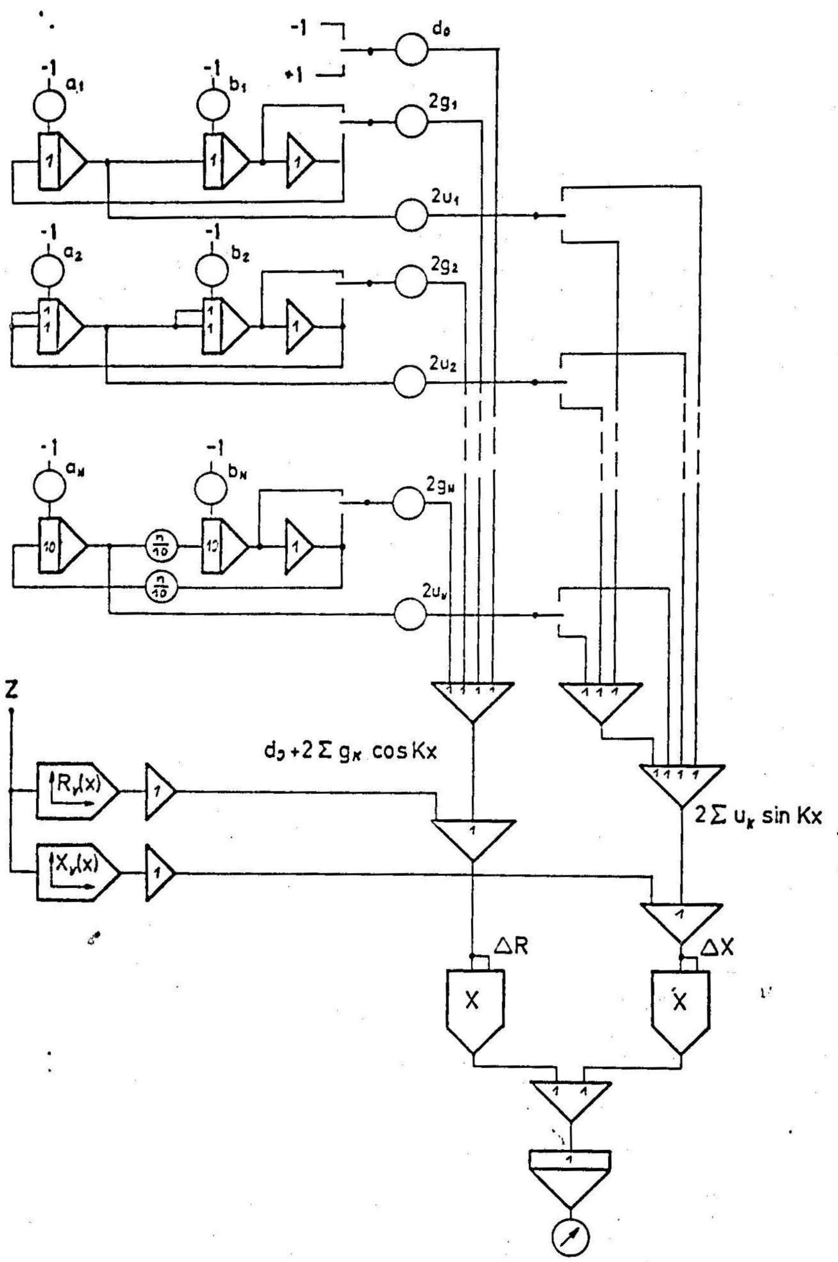


Abb. 12 Simulation des gesamten Abgleichverfahrens auf dem Analogrechner (einschließlich der Simulation des Transversalfilters)

Die Integrationsgrenzen werden durch geeignete Anfangswerte der Integrierer und durch Wahl der Rechenzeit festgelegt.

Damit bildet der Integrierer am Ausgang das Integral

$$E' = \int_{t_u}^{t_o} (\Delta R^2(t) + \Delta X^2(t))dt$$

$$\sim \int_{0}^{\pi} B(x)\cdot(\Delta R^2(x) + \Delta X^2(x))dx$$

mit $\quad B(x) = 1 \quad$ für $x_u \leqslant x \leqslant x_o$

$\quad\quad = 0 \quad$ sonst

Die Anfangswerte der Integrierer errechnen sich zu $a_k = \sin(k\cdot x_u)$ und $b_k = \cos(k\cdot x_u)$. Bei gleichen Zeitkonstanten k_o der Integrierer folgt für die Rechenzeit $t^* = (x_o - x_u)/k_o$.

5.6 Digitale Simulation des Abgleichverfahrens

Um die Konvergenz des Iterationsverfahrens genauer untersuchen zu können, wurde das Abgleichverfahren auf dem Digitalrechner simuliert. Dabei sollte nicht - im Sinne eines Optimierungsverfahrens - mit möglichst wenigen Iterationsschritten das Minimum gefunden werden, sondern der manuelle Abgleich nachgebildet werden. Das digitale Verfahren arbeitet so, daß ein einziger Koeffizient d_k um eine feste Schrittweite 2 s geändert und dann die Fourier-Transformation in den Frequenzbereich durchgeführt wird. Dann wird der neue mittlere quadratische Fehler bestimmt und eine weitere Änderung des Koeffizienten durchgeführt, bis das mit der Schrittweite 2 s erreichbare Minimum der Fehlerfunktion längs dieser Variablen d_k gefunden ist. Anschließend wird der nächste Koeffizient d_{k+1} auf die gleiche Weise abgeglichen. Dieser Strategie entspricht ein Grobabgleich beim Analogverfahren.

Zeigt sich nach einem Durchlauf über alle Variablen, daß sich die Fehlerfunktion mit der vorgegebenen Schrittweite nicht mehr ändern läßt, so wird die Schrittweite verringert (Feinabgleich).

Die nach jeder Änderung eines Einstellkoeffizienten erforderliche Berechnung der neuen Übertragungsfunktion kann sehr einfach durchgeführt werden. Soll d_k um die Schrittweite 2 s geändert werden, so muß für die Koeffizienten des Real- und Imaginärteils gelten (s. Gl. 2.8 und 2.9):

$$g_{k(neu)} = g_{k(alt)} + s$$
$$u_{k(neu)} = u_{k(alt)} - s$$

Damit ist

$$\begin{aligned} d_{k(neu)} &= g_{k(neu)} - u_{k(neu)} \\ &= d_{k(alt)} + 2\ s \end{aligned}$$

d_{-k} wird dabei nicht geändert:

$$\begin{aligned} d_{-k(neu)} &= g_{k(neu)} + u_{k(neu)} \\ &= d_{-k(alt)} \end{aligned}$$

Für den neuen Real- und Imaginärteil gelten dann die einfachen Beziehungen:

$$R_{T(neu)} = R_{T(alt)} + 2 \cdot s \cdot \cos kx$$

$$X_{T(neu)} = X_{T(alt)} - 2 \cdot s \cdot \sin kx$$

Die Einstellung eines d_{-k} - Koeffizienten ergibt sich ganz analog, wenn $u_{k(neu)} = u_{k(alt)} + s$ gesetzt wird.

Das Abgleichverfahren und seine Simulation zeigen sehr ähnliche Ergebnisse: die Konvergenz des Iterationsverfahrens ist bei den ersten Durchläufen (über alle Variablen) recht gut, wird dann aber oft sehr schlecht; sie kann manchmal verbessert werden, wenn der Abgleich mit einem anderen Koeffizienten begonnen wird.*

---

* Ausgangspunkt des Abgleichs sind die auf Null gesetzten Einstellkoeffizienten ($d_k = 0$ für alle k).

6. Meßergebnisse

Die Brauchbarkeit und die Genauigkeit des Analog-Abgleichverfahrens soll für drei vorgegebene Übertragungsfunktionen gezeigt werden:

1) Differentiation
2) Tiefpaßcharakteristik
3) Fernsprechkanal

Es zeigt sich, daß folgende Eigenschaften für das Verfahren kennzeichnend sind:

a) Durch den Abgleich werden die Einstellkoeffizienten des Transversalfilters so eingestellt, daß die Übertragungsfunktion des Filters die vorgegebene Funktion möglichst gut approximiert. Damit werden Fehler, die bei der Rekonstruktion des Ausgangssignals aus den Abtastwerten entstehen, automatisch berücksichtigt und korrigiert (s. dazu Abschnitt 3.3).

b) Sind eine größere Zahl von Koeffizienten abzugleichen, so nehmen die Abweichungen der erzielten Lösung von der optimalen Lösung zu. Denn bei höherem Approximationsgrad wird die Konvergenz des Verfahrens i. a. schlechter, so daß der Abgleich frühzeitig abgebrochen werden muß.

c) Mehrfache Durchführung des Abgleichs bei gleichbleibender vorgegebener Übertragungsfunktion $H_V(jx)$ ergibt verschiedene Ergebnisse. Denn einerseits wird man bei unzureichender Konvergenz den manuellen Abgleich irgendwann abbrechen, andererseits hat auch die Rechenschaltung, die den mittleren quadratischen Fehler erzeugt, einen Eigenfehler E^*, durch den die Iteration begrenzt ist. Ist E^* erreicht, so können die Einstellkoeffizienten (Wendelpotentiometer) in kleinen Bereichen geändert werden, ohne daß sich die Anzeige des mittleren quadratischen Fehlers ändert.

Es sind daher unendlich viele Lösungen möglich; die Lösungsvektoren liegen auf dem Rande oder im Innern des N-dimensionalen Ellipsoides E* = const. (N = Zahl der einzustellenden Koeffizienten).

Die unter b) und c) skizzierten Eigenschaften werden vor allem bei dem ersten Beispiel, der Differentiation, sichtbar.

Beispiel 1: Differentiation

Die Übertragungsfunktion $H_V(j\omega) = j\omega$ wurde gewählt, um die Genauigkeit des Analogverfahrens überprüfen zu können; bei einer Approximation in einem eingeschränkten Periodizitätsintervall kann die optimale Lösung leicht aus dem Gleichungssystem (3.16) berechnet werden. Außerdem wurde auch das Transversalfilter auf dem Analogrechner simuliert (vgl. Abschnitt 5.5). Da die zu approximierende Funktion rein imaginär ist, sind alle g_k - Werte Null. Das Approximationsintervall war auf den Bereich von 0 Hz bis 1/4T Hz (T = Abtastfrequenz) festgelegt:

$$B(x) = 1 \qquad 0 \leq x \leq 0{,}5\cdot\pi$$

mit $\qquad x = \omega\cdot T$

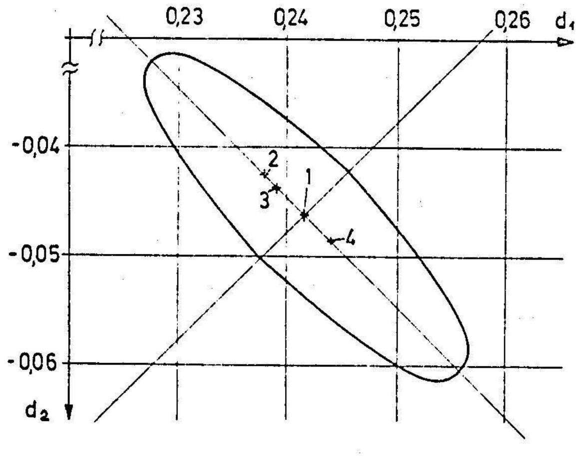


Abb. 13 Vergleich der Koeffizienten der Lösung 2÷4 mit den optimalen Koeffizienten.

Approximationsgrad: 2

Werden Koeffizienten von d_{-2} bis d_{+2} optimiert (mit $d_o = 0$), so ergeben sich Lösungen, die der optimalen Lösung sehr nahekommen. Die Ellipsen E = const. (E = Fehlerfunktion) sind gegen das Koordinatensystem gedreht (s. Abb. 13).

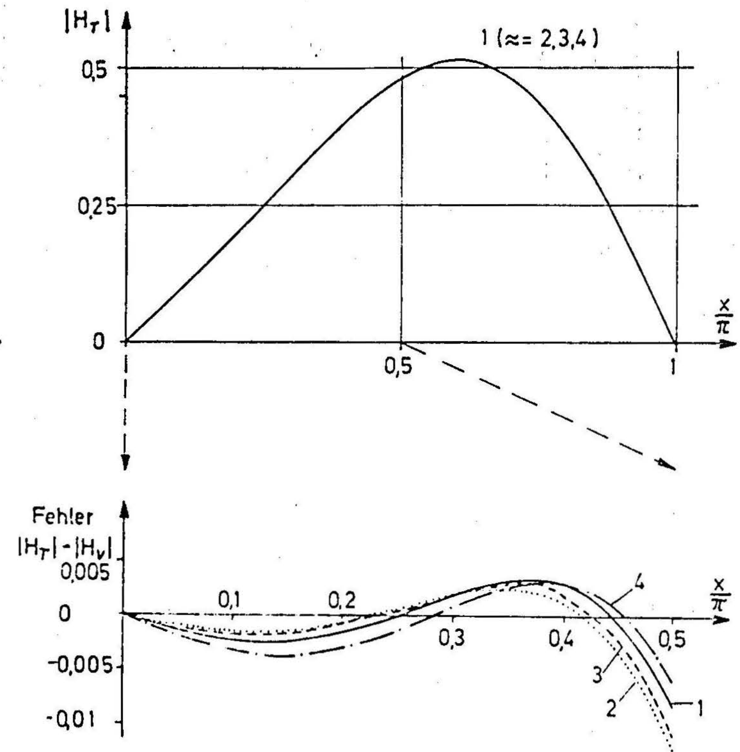


Abb. 14 Vorgegeben: $H_v = j\omega$; $G=0$ für $x > 0{,}5 \cdot \pi$
Approximationsgrad: 2.

1 = optimale Lösung
2-4 = Lösung nach Abgleichverfahren.

Die Suchbewegung erfolgt auf Geraden parallel zu den Koordinatenachsen; das mit einem Einstellkoeffizienten d_k erreichbare partielle Minimum E' ist gefunden, wenn di Gerade d_k = const. die Ellipse E' = const. berührt. Ausgangspunkt der Suchbewegung ist der Koordinatenursprung. Die Punkte 2 bis 4 in der Abb. 13 geben verschiedene mit dem Abgleichverfahren gefundene Lösungen an. Nach Transformation in den Frequenzbereich ergeben sich die Übertragungsfunktionen H_T, aus denen dann der Verlauf des Fehlers $|H_T| - |H_V|$ berechnet werden kann (s. Abb. 14)

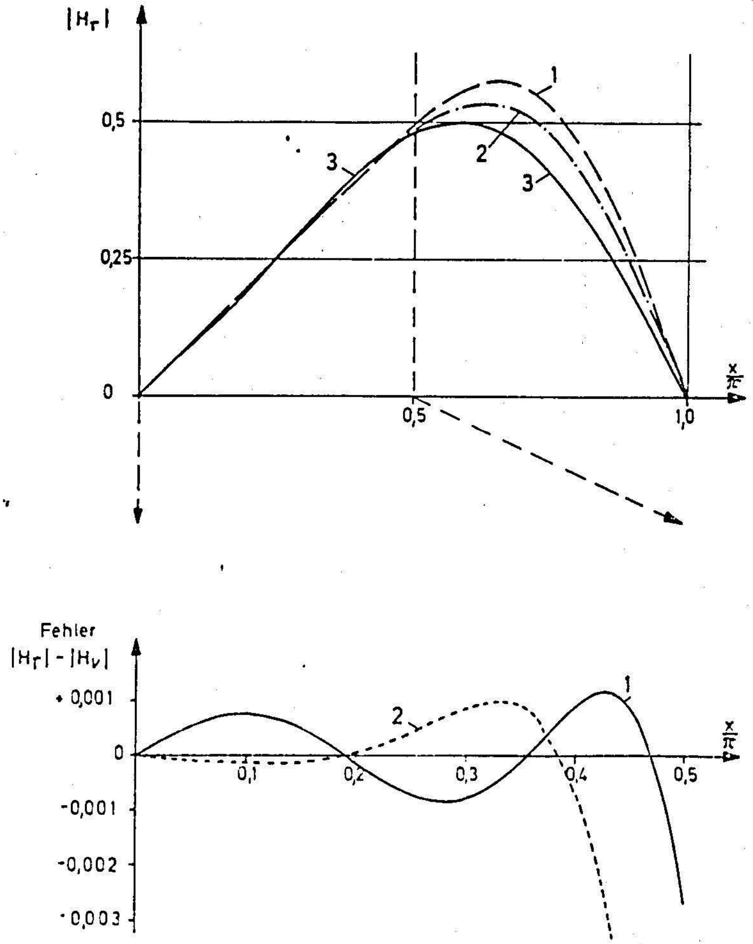


Abb.15 Vorgegeben: $H_v = j\omega$; $G = 0$ für $x > 0{,}5 \cdot \pi$
Approximationsgrad = 3

1 = optimale Lösung
2 und 3: Lösung nach Abgleichverfahren

<u>Approximationsgrad: 3</u>

Bei einer Optimierung mit Einstellkoeffizienten von d_{-3} bis d_{+3} wird die Approximation verbessert, dafür werden die Unterschiede der durch das Abgleichverfahren erreichten Lösungen zur optimalen Lösung größer. Der Verlauf 3 ergab sich bei einem vorzeitig abgebrochenen Abgleich.

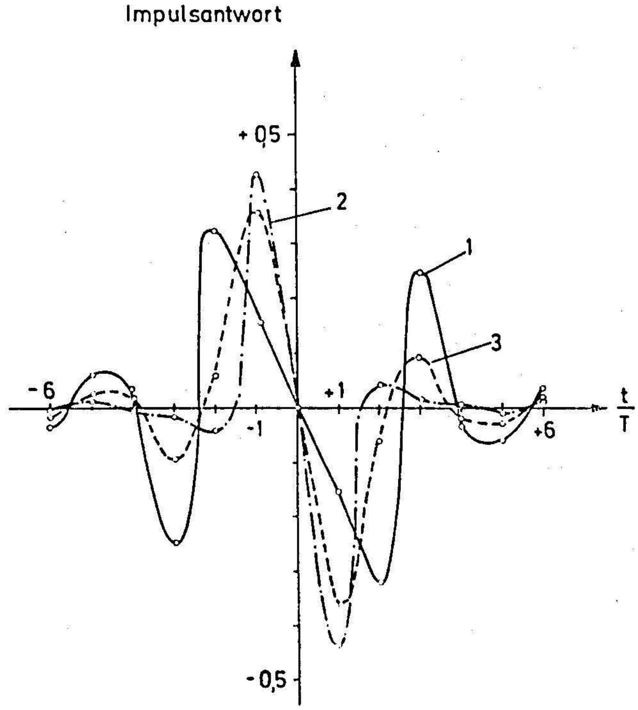


Abb.16 Vergleich von drei aus dem Analog-Abgleichverfahren ermittelten Impulsantworten.
Vorgegebene Übertragungsfunktion: $H_v = j\omega$
Approximationsgrad: 6

<u>Approximationsgrad: 6</u>

Wie bereits in der Einleitung dieses Abschnittes festgestellt wurde, kann sich eine schlechte Konvergenz ergeben, wenn die Zahl der Koeffizienten groß wird. Über die Konvergenz entscheidet oft der erste Koeffizient, dessen partielles Minimum gesucht wird.

So kann es sein, daß dieses Minimum zuerst einen positiven Einstellkoeffizienten ergibt (während dieser in der optimalen Lösung negativ ist), und daß dieser Koeffizient dann nach jedem Umlauf über alle Variablen nur sehr langsam kleiner wird. Es ergeben sich dann sehr schlechte Approximationen (Beispiel: Verlauf 1 in Abb. 16 und 17).

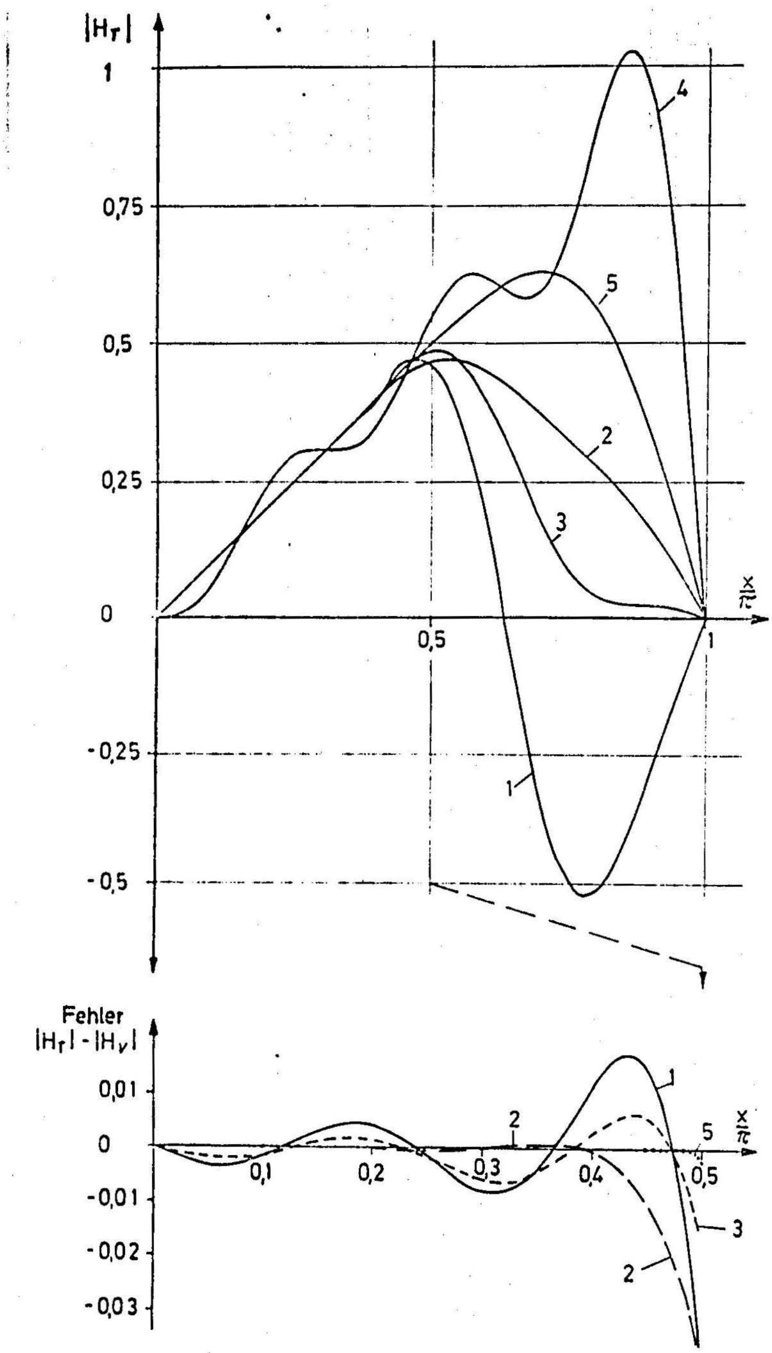


Abb.17 H_v = vorgegebene Übertragungsfunktion. $H_v = j\omega$
H_T = aus Abgleichverfahren ermittelte Übertragungsfunktion (Approximationsgrad: 6)
1 ÷ 3 : B = 0 für x > 0,5 π
Vergleich: 4 : B = 1 für alle x (Fourier-L)
5 : B = 0 für x > 0,5π (optim. L)

Beispiel 2: Tiefpaßcharakteristik.

In der Abbildung 18 wird die an Diodenfunktionsgebern eingestellte Übertragungsfunktion (Realteil R_V , Imaginärteil X_V) mit der nach Abgleich am Abtast-Transversalfilter gemessenen

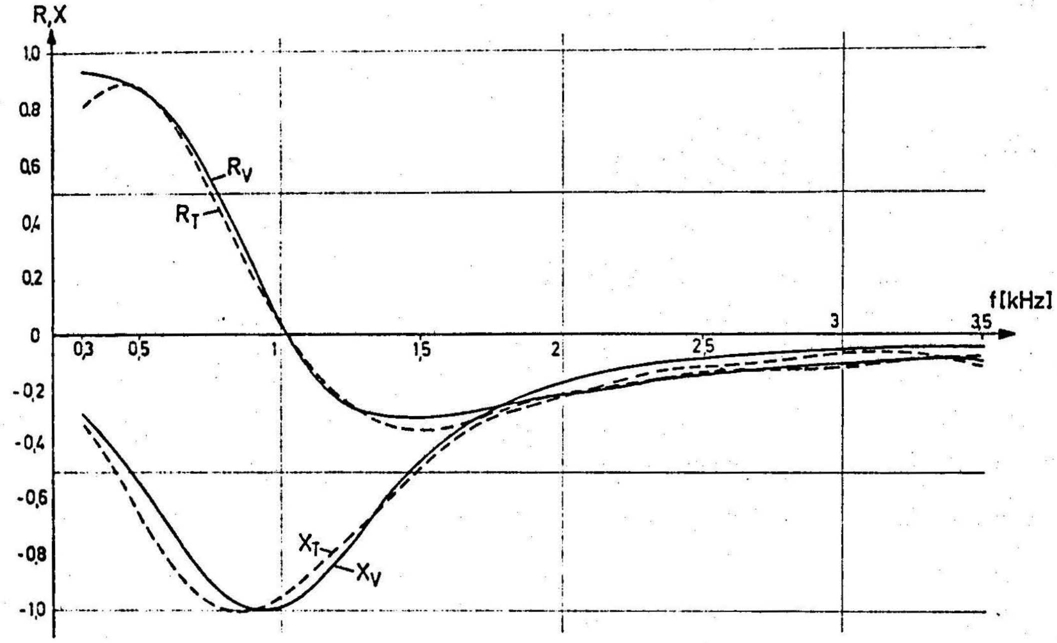


Abb. 18a: Abgleich auf kleinsten Absolutwert

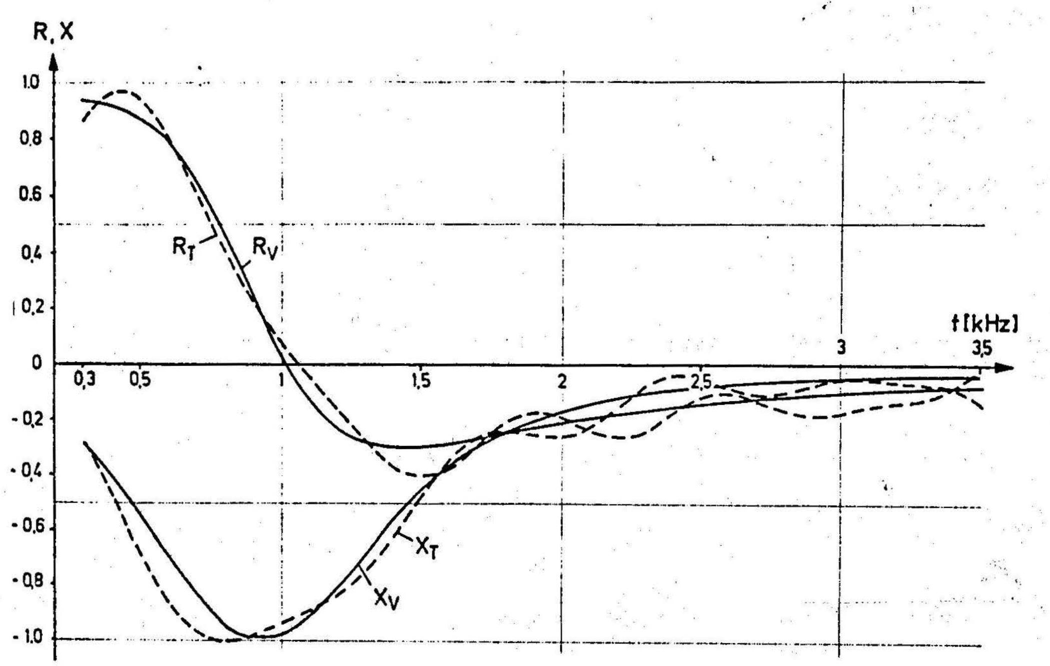


Abb. 18b: Abgleich auf kleinstes Fehlerquadrat.

Abb. 18: Übertragungsfunktion mit Tiefpaßcharakteristik

R_V, X_V Vorgegebener Real- und Imaginärteil in Diodenfunktionsgebern eingestellt.

R_T, X_T Am Transversalfilter nach Abgleich gemessener Real- und Imaginärteil. Approximation mit 20 Koeffizienten.

Übertragungsfunktion (Realteil R_T, Imaginärteil X_T) verglichen. Wird als Fehlerfunktion statt des kleinsten Fehlerquadrats ($\Delta R^2 + \Delta X^2$) der kleinste Absolutwert ($|\Delta R| + |\Delta X|$) verwendet, so wird der Abgleich sehr viel genauer (Abb. 18a bzw. 18b ; vgl. auch Abschnitt 5.4.2). Zur Approximation wurden 20 Koeffizienten verwendet.

Beispiel 3: Fernsprechkanal.

Die Übertragungsfunktion eines Fernsprechkanals ist i.a. durch den Frequenzgang von Dämpfungs- und Laufzeitverzerrung gegeben (s. z.B. /16/). Da sich die Grundlaufzeit daraus nicht ermitteln läßt, kann sie willkürlich festgelegt werden. Damit werden die Übertragungsfunktionen nichtkausal bezüglich des nullten Koeffizienten; ihn wird man so wählen, daß die entstehende Impulsantwort zu einer möglichst guten Approximation führt. Bei vorgegebener Zahl der Einstellkoeffizienten ist daher der Abgleich mehrfach bei veränderter Lage des nullten Koeffizienten durch -

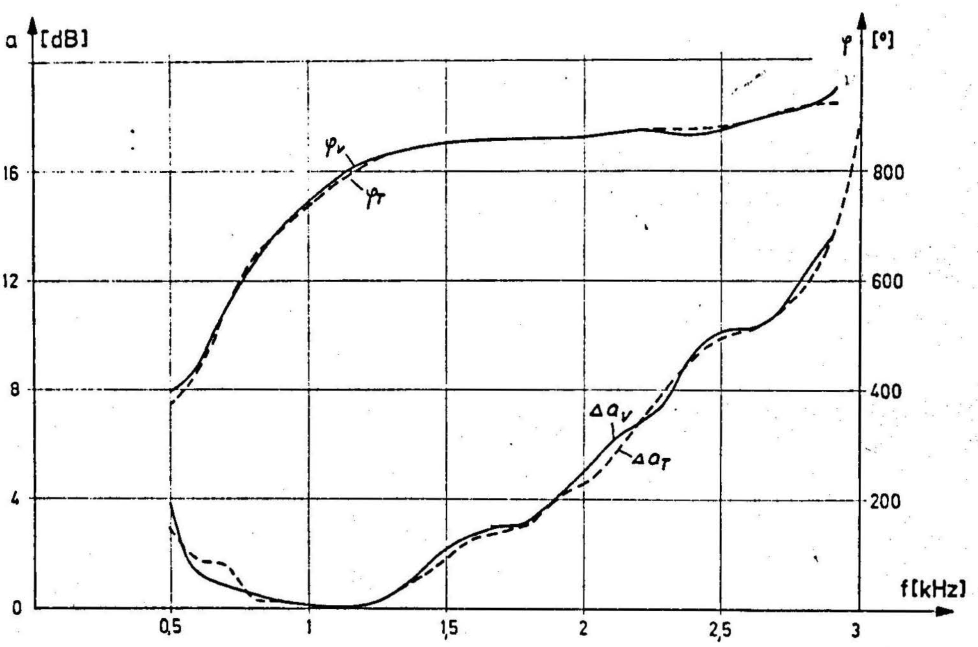


Abb. 19: Approximation der Übertragungsfunktion eines Fernsprech-Kanals ($\Delta a_v, \varphi_v$) durch ein Transversalfilter mit 48 Einstellkoeffizienten

zuführen; das gleiche gilt für die rechnerische Bestimmung der optimalen Koeffizienten (s. Abschnitt 9 =Anhang).
Die Abb. 19 zeigt ein Beispiel für die Approximation eines Fern-

sprechkanals im Bereich von 0.5 kHz bis 2.9 kHz. Die Abbildungen 22 bzw. 23 zeigen die Impulsantwort bzw. den Frequenzgang am Ausgang des Transversalfilters.

7. Beschreibung des Abtastfilters.

Das aufgebaute Transversalfilter besteht aus 48 hintereinandergeschalteten Verzögerungsgliedern, die durch Abtast-Halteglieder realisiert wurden (Abb. 20, s. auch /15/). Die Verzögerungs-

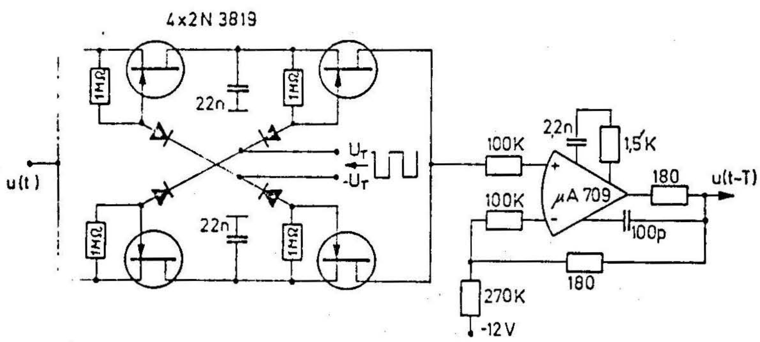


Abb. 20 Schaltung des Abtast-Haltegliedes.

zeit ist einstellbar; bei den hier vorgestellten Meßergebnissen war sie auf T = 0.1 ms eingestellt.
An die Verzögerungsleitung können drei Koeffizientensätze gleichzeitig angeschlossen werden. Die Bewertungskoeffizienten an den einzelnen Abgriffen lassen sich entweder mit Wendelpotentiometern oder - für oft einzustellende Übertragungsfunktionen - mit Festwiderständen auf Steckkarten einstellen. Da so auf einfache Weise auch die Hilbert-Transformation durchgeführt werden kann (vgl. Abschnitt 5.4.1), ist es möglich, auch den Real- und Imaginärteil einer eingestellten Übertragungsfunktion darzustellen. Die Rekonstruktion wird durch Nachabtastung des Summen-Treppensignals und anschließender Tiefpaß-Filterung (f_g = 3.5 kHz,C052532) vorgenommen.
Die folgenden Aufnahmen verdeutlichen die Eigenschaften des Filters.

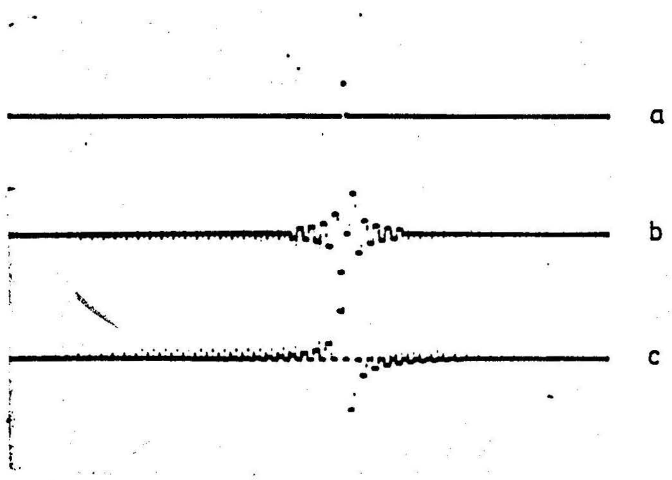


Abb. 21: Impulsantworten des Transversalfilters.

a: Eingangsimpuls.

b: Differentiation , 19 Koeffizienten.

c: Hilbert-Transformation, 39 Koeffizienten.

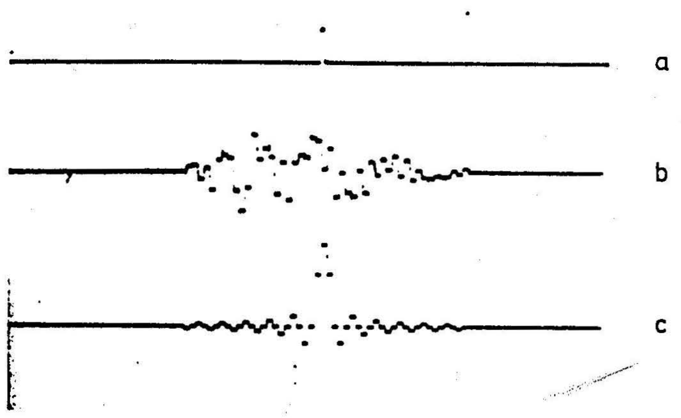


Abb. 22: Impulsantworten des Transversalfilters.

a: Eingangsimpuls.

b: Fernsprechkanal , 48 Koeffizienten.

c: Tiefpaß, 48 Koeffi - zienten.

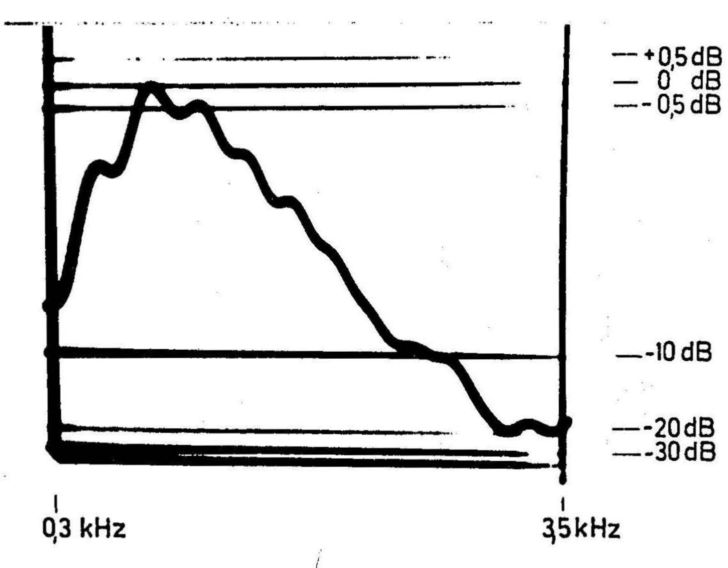


Abb. 23: Frequenzgang eines Fernsprechkanals.

48 Koeffizienten, vgl. Abschnitt 6, Abb.19.

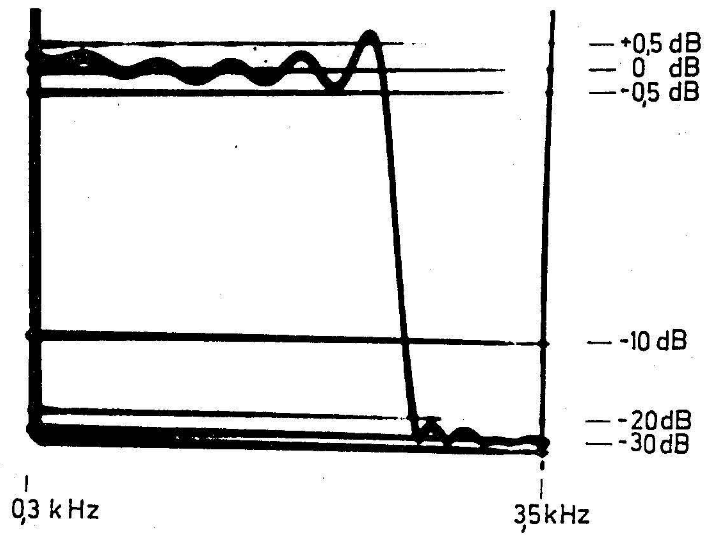


Abb. 24: Frequenzgang eines Tiefpasses, 48 Koeffizienten.

Grenzfrequenz: 2.5 kHz.
B(x) = 1 im gesamten Frequenzbereich.

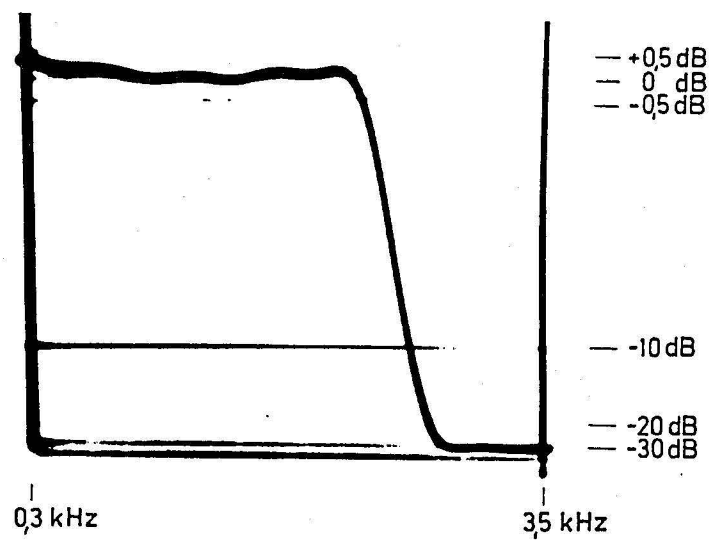


Abb. 25: Frequenzgang eines Tiefpasses, 39 Koeffizienten.

Grenzfrequenz: 2.5 kHz.
B(x) = 0 zwischen 2.2 kHz und 2.8 kHz.

8. Literaturverzeichnis

/1/ Kaiser, J. F. — Digital Filters
in: F.K. Kuo, J.F. Kaiser "System Analysis by Digital Computer", S. 218 - 285
J. Wiley & Sons. Inc., New York, 1966

/2/ Schüßler, W. — Zur allgemeinen Theorie der Verzweigungsnetzwerke
Arch. el. Übertragung (AEÜ), Bd. 22 (1968), H. 8, S. 361 - 367

/3/ Schüßler, W. — Der Echoentzerrer als Modell eines Übertragungskanals
Nachrichtentechn. Zeitung (NTZ), 1963, H. 3, S. 155 - 163

/4/ Pellandini, F.; Bonzanigo, F. — Synthèse des filtres digitaux sans contreréaction
AGEN-Mitteilungen, Nr. 9, Juli 1969

/5/ Hafner, E. R.; Leuthold, P. E. — Transversal filters with continuously tapped delay lines (CTT-Filters)
Proc. IEEE Vol. 57 (1969), No. 12, S. 2114 - 2122

/6/ Kuntz, W. — Entwurf und Anwendung eines Abtast-Analogrechners
NTZ 1968, H. 2, S. 82 - 87

/7/ Kuntz, W.; Schüßler, W.; Winkelnkemper, W. — Untersuchungen über Eigenschaften, Entwurf und Realisierung digitaler Filter
Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme (Herausgeber: W. Schüßler), Nr. 10, Erlangen 1969

/8/ Gold, B.; Rader, C. M. — Digital Processing of Signals
McGraw-Hill Book Company, 1969

/9/ Leuthold, P. — Filternetzwerke mit digitalen Schieberegistern
Philips Research Reports, Suppl. No. 5, 1967

/10/ Unbehauen, R. — Die Approximationsaufgabe in der Netzwerksynthese und ihre Lösung NTZ 1968, H. 10, S. 593 - 664

/11/ Fleischer, P. E. — Digital realization of complex transfer functions Simulation, Vol. 6, No. 3 (1966), S. 171 - 180

/12/ Lennertz, D. — Approximative Darstellung von Funktionen und der zugehörigen zeitinvertierten Funktionen NTZ 1967, H. 7, S. 377 - 381

/13/ Ketchledge, R. W. Finch, T. R. — The L 3 coaxial system-equalization and regulation Bell System Techn. Journ. 32 (1953), S. 856 - 862

/14/ Herrmann, O. — Transversalfilter zur Hilbert-Transformation AEÜ 23 (1969), H. 12, S. 581 - 587

/15/ Wendland, B. — Abtastsysteme zur Entzerrung von Datenkanälen TU Berlin 1969, Dissertation

/16/ Biehler, H. — Messungen an Leitungen im Fernmeldenetz der DBP hinsichtlich der Verwendung zur Datenübertragung. NTF - Fachbericht Band 37 (1969), S. 145 - 162

9. Anhang.

Wegen des Interesses, das die Möglichkeit der Simulation von Fernsprechkanälen mit Transversalfiltern gefunden hat, soll hier ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der optimalen Einstellkoeffizienten angegeben werden.
Nach Abschnitt 3.2 muß die Funktion

$$E = I_E - 2\,\mathbb{D}^T\cdot\mathbb{F} + \mathbb{D}^T\mathbb{B}\cdot\mathbb{D}$$

minimisiert werden. Mit der Bedingung $\frac{\partial E}{\partial \mathbb{D}} = 0$ ergibt sich der Vektor der optimalen Koeffizienten, $\mathbb{D}$, aus dem Gleichungssystem $\mathbb{B}\cdot\mathbb{D} = \mathbb{F}$. Die Matrix ist allein durch den Verlauf der Bewertungsfunktion B(x) gegeben. Sind also die optimalen Koeffizienten bei gleichbleibender Bewertung für verschiedene vorgegebene Übertragungsfunktionen zu berechnen, so wird man die inverse Matrix bestimmen ($\mathbb{B}^{-1}$). Der Koeffizientenvektor $\mathbb{D}$ kann dann sehr einfach - auch auf einer Tischrechenmaschine - ausgerechnet werden: $\mathbb{D} = \mathbb{B}^{-1}\cdot\mathbb{F}$.
Ein weiterer Grund spricht für die Bildung der Inversen: wenn eine Grundlaufzeit des simulierten Kanals nicht interessiert, dann wird man den Null-Koeffizienten d_o so legen, daß die Impulsantwort bei vorgegebener Koeffizientenzahl die Übertragungsfunktion möglichst gut approximiert. Dazu müssen verschiedene Lösungsvektoren bestimmt und miteinander verglichen werden. Es wäre ungünstig, für jede neu gewählte Lage des nullten Koeffizienten das Gleichungssystem $\mathbb{B}\cdot\mathbb{D} = \mathbb{F}$ neu zu lösen, da sich die Matrix $\mathbb{B}$ (und damit auch $\mathbb{B}^{-1}$) bei einer Verschiebung des nullten Koeffizienten wegen ihrer Bandstruktur nicht ändert. Das folgende Schema zeigt diesen Sachverhalt für vier Koeffizienten. In der Matrix wurde „i." als Abkürzung von $I_B(i)$, i=0,1,2,... benutzt.

$$\begin{pmatrix} 0. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. \\ 1. & 0. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. \\ 2. & 1. & 0. & 1. & 2. & 3. & 4. \\ 3. & 2. & 1. & 0. & 1. & 2. & 3. \\ 4. & 3. & 2. & 1. & 0. & 1. & 2. \\ 5. & 4. & 3. & 2. & 1. & 0. & 1. \\ 6. & 5. & 4. & 3. & 2. & 1. & 0. \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{-3} \\ d_{-2} \\ d_{-1} \\ d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_F(-3) \\ I_F(-2) \\ I_F(-1) \\ I_F(0) \\ I_F(1) \\ I_F(2) \\ I_F(3) \end{pmatrix}$$

Die Inversion führt bei Matrizen größerer Ordnung leicht auf Schwierigkeiten, da die Matrix fast singulär wird. Verbesserungen ergeben sich, wenn die Bewertungsfunktion B(x) im nicht interessierenden Bereich nicht zu Null gesetzt wird (sondern z.B. 10^{-6}). Da die Möglichkeiten zur Inversion von Matrizen oft nicht vorhanden sind, werden im folgenden die Elemente der Matrix für N = 8,16,24,32 angegeben. Bei den Rechnungen wurden doppeltgenaue Konstanten benutzt (2 x 32 bit), die Inversion wurde mit der Dreieckzerlegung nach Cholesky durchgeführt. $\mathbb{B}^{-1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 10 & 12 \\ & 3 & 5 & 8 & 11 & \\ & & 6 & 9 & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{vmatrix}$$

ist wie $\mathbb{B}$ symmetrisch zu beiden Diagonalen, jedoch geht die Bandstruktur verloren. Wegen

$$a_{i,k} = a_{(N-k+1),(N-i+1)} = a_{k,i}$$

werden nur (N+2) x N/4 Werte angegeben. Die Nummerierung folgt dem nebenstehenden Schema (Beispiel N=6).

Für B(x) gilt:

B = 0.0005	$x < 0.06 \cdot \pi$
B = 1	$0.06 \cdot \pi \leq x \leq 0.68 \cdot \pi$
B = 0.0005	$0.68 \cdot \pi < x \leq \pi$

Bei einer Abtastfrequenz von 10 kHz (T = 0.1 ms) ist B = 1 im Bereich von 0.3 kHz bis 3.4 kHz.* Bei der Bestimmung der Komponenten des Vektors $\mathbb{F}$ müssen Integrationen durchgeführt werden. Die bei diesen Integrationen auftretenden Fehler machen sich bei großen Werten der Elemente der Matrix $\mathbb{B}^{-1}$ stärker bemerkbar. Mit B = 0.0005 werden gute Approximationen erreicht, wenn die Stützstellen der Übertragungsfunktion in 100 Hz-Abständen gegeben und im nichtinteressierenden Bereich zu Null gesetzt sind. Bei großen N-Werten wird eine Erhöhung der Zahl der Stützstellen durch Interpolation empfohlen.

---

*Für andere Werte und Bereiche werden entsprechende Ergebnisse gerne zur Verfügung gestellt.

N = 8

6.8506686
-9.9811297
20.7527979
14.2631870
-28.8705758
44.8587904
-15.2948088
33.4166920
-51.4625686
63.6934267
14.3489817
-31.8150806
50.3296284
-62.0455834
-10.2421347
24.5966744
-39.3231122
6.1884033
-14.8990167
-2.0938168

N = 16

10.7440506
-18.8246215
43.7176141
30.3977578
-72.0459558
129.5563367
-35.8807979
93.2740199
-173.6033176
249.3734713
36.5857256
-100.0594333
197.1134042
-295.7027928
373.2989347
-27.1828735
84.4585168
-178.0175980
287.6308232
-386.1676159
435.3651447
14.8446597
-53.5495755
127.9859844
-227.2111220
335.1279759
-413.9699952
441.6878598
0.4831949
14.4313967
-54.0350916
125.9095767
-221.8653973
322.0779471
-396.1008571
420.8538879
-9.7515474
17.2865566
-11.9514410
-21.1674103
90.2929624
-189.4886246
297.3987616
-382.9530930
14.9691257
-35.9649234
59.5783674
-61.9572235
29.9250196
52.0386957
-168.2510784
-12.3463497
37.0308693
-72.7332067
100.3513144
-100.3295327
49.4325908
8.4891761
-28.0071291
64.4131857
-100.2433449
122.5391575
-2.6559135
14.2017154
-40.0493157
72.1519133
0.3321244
-4.2765414
19.5820459
1.3297002
-1.1176546
-0.3110296

N = 24

12.4909616
-21.7464946
50.3475171
35.7425025
-83.9357765
152.2323791
-40.6209306
106.4255761
-199.7858628
283.9529077
40.2563539
-110.6598480
221.1343747
-330.2241577
413.0950291
-25.8413170
85.2643930
-184.8000240
305.3641664
-413.7488534
466.4573385
10.3109074
-43.8526407
115.3949499
-218.9483669
339.3685316
-434.7662663
473.9662957
8.4565144
-4.2745508
-21.0799197
89.2985235
-193.4560439
321.1594250
-425.5041291
474.4983792
-14.9698000
34.4156920
-46.0405688
26.5483802
42.3752629
-161.9505061
307.0901891
-431.7418448
489.5145457
16.1988294
-43.1131818
80.1609061
-98.1212720
78.0040710
8.5588071
-147.6068568
315.8445569
-449.4950949
509.5793429
-5.2838026
25.4903530
-59.1943116
98.2915199
-116.3387281
88.4532891
5.7365744
-154.6878740
324.8062864
-457.8401052
509.4503697
-2.7056033
-0.7244567
19.3181465
-51.9423322
91.5120016
-109.9547223
83.7071162
9.6242429
-155.7373066
323.7341842
-452.8366641
503.7373583
11.2850051
-22.1603817
29.5700972
-15.4132061
-18.0409705
67.1647682
-97.4424584
84.0707981
1.5600928
-144.2023884
314.0510452
-447.2671935
-8.8702477
26.6818413
-47.0635041
57.9445942
-43.4087821
0.5497532
59.0762012
-101.7031820
93.3922164
-9.2000102
-139.2731291
5.4341117
-18.4208966
43.1664752
-65.6567174
76.6135948
-54.1822898
3.5386413
66.1620625
-110.7723208
101.8908644
3.4312480
-0.2637678
-11.4692411
34.8325716
-58.1415568
68.0784455
-46.7610654
-4.5831078
69.8878586
-6.0438857
13.6986024
-14.9089105
5.5753346
18.6284738
-44.3103749
58.8487302
-41.2005580
8.0539680
-19.9216645
35.2482096
-39.6260534
29.6822659
1.2164560
-35.2664934
-3.5384623
14.3899387

-31.8716178
48.5533027
-53.2852695
36.0882275
1.1077500
-5.9070821
22.1329464
-39.9800224
57.7757186
2.7321698
-2.9633747
-5.2133494
20.2673947
-2.1780598
5.8323926
-2.0070183
2.2105628
-5.4179441
-0.2127082

N=32

13.9003906
-23.5885647
53.9086989
39.5877652
-90.8246997
166.4978947
-43.5017304
113.4849468
-214.5083913
302.3605065
43.2008770
-117.0060197
235.9905359
-348.9998737
434.8222771
-25.0438242
85.8270645
-187.9815586
313.9003041
-425.6466125
479.1612275
8.8547677
-40.1915343
110.7135000
-215.2494606
340.2901194
-440.8557920
484.0933864
12.6759386
-12.7713901
-4.4062513
71.4653183
-176.9283197
318.1598905
-433.4546545
495.0122170
-16.1737525

40.2663900
-58.4401954
45.6840057
22.5395117
-148.6715030
308.6974845
-447.4044964
512.8339246
16.9203133
-45.1658816
87.6932849
-110.3746592
95.6758802
-6.2363338
-139.5199602
322.5803561
-465.1618333
529.6940059
-1.1750547
18.9513661
-48.4112969
91.2354810
-113.6821463
97.5660676
-6.7688694
-140.3861339
323.6913322
-466.0961564
529.7274875
-5.2598289
7.7834617
4.0609835
-32.0700327
75.1931323
-104.4063346
94.4064875
-11.3837502
-134.4926973
317.7274361
-465.7097574
531.6662766
14.6686584
-30.4861307
48.6470774
-40.6254070
10.4106300
50.8120949
-97.0110124
105.9299917
-26.1393006
-121.1126380
317.0815871
-470.7348560
541.7848068
-6.3314901
25.5909337
-48.0320882
67.8120027
-58.6474755
20.7274869
47.8169359
-101.7977160

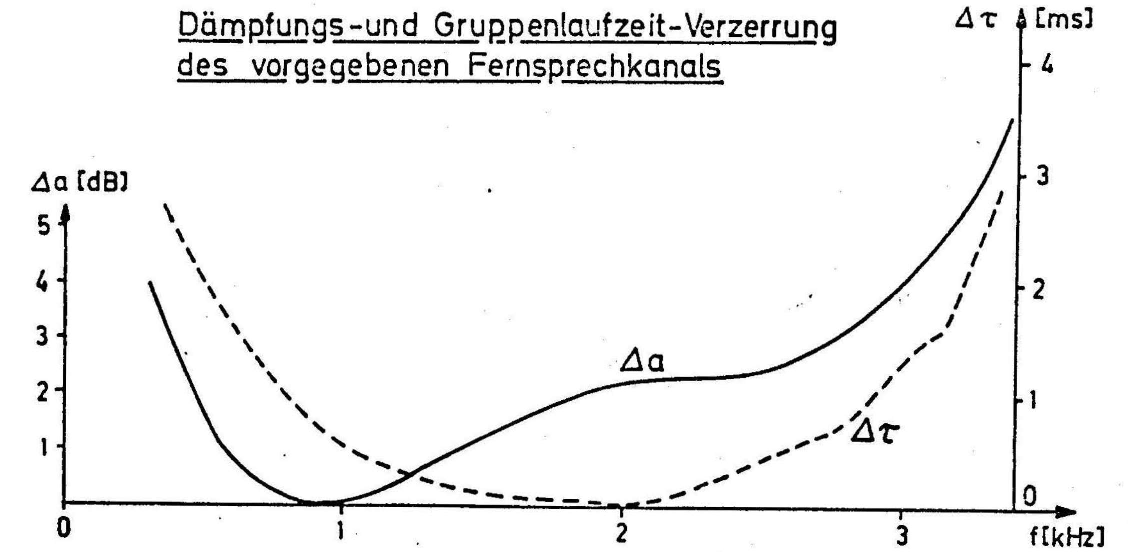
112.0653692
-31.4623865
-120.8939012
319.1974993
-474.5606912
543.1476355
2.6283151
-10.9427575
32.6636537
-55.7057624
74.5746248
-62.4568587
21.5201869
49.3754946
-103.8099749
113.2401939
-31.4157988
-121.6507536
319.5460453
-474.4661080
542.5476154
9.4941910
-13.7608927
15.3375768
3.9658162
-28.7841076
59.1719952
-58.0300115
28.6366585
40.2518434
-95.9759144
112.9318432
-34.5712727
-116.0911317
317.5968961
-474.6881368
545.3229262
-6.8003010
21.2972279
-32.4093244
35.6585363
-14.7204637
-18.1447704
56.3753304
-62.7715375
34.7277172
35.4997410
-95.8691100
115.0911157
-37.5243190
-115.2432026
318.2214420
-475.8199584
7.1806517
-19.3530156
40.7442319
-53.5399873
54.5570261
-25.4062782
-15.7139882
60.8854325
-68.5836141

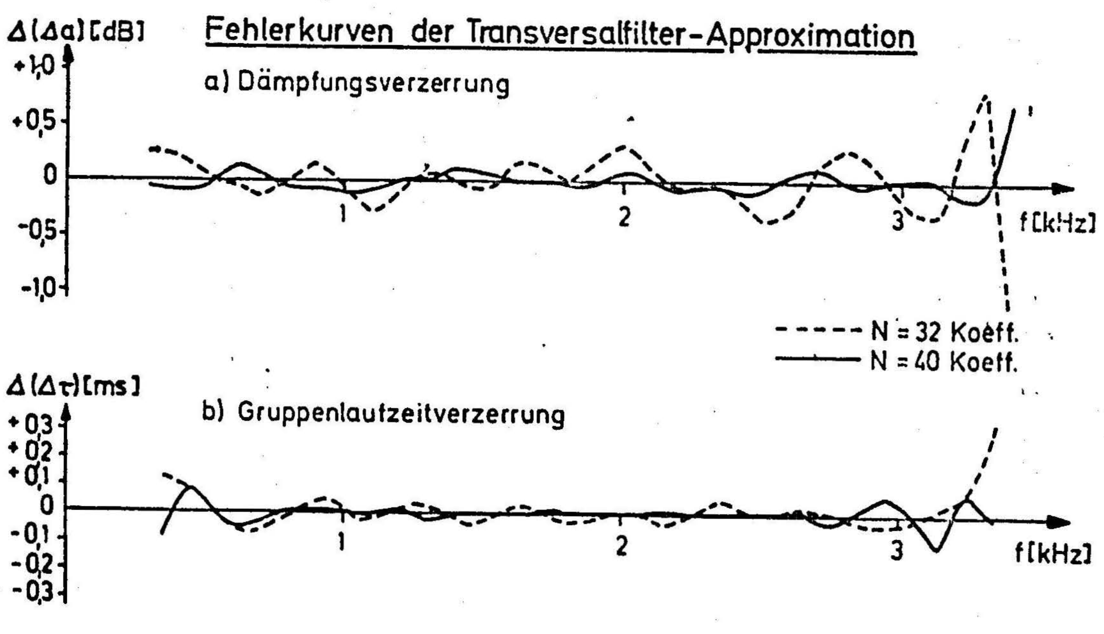
38.5461643
35.5461994
-98.0083326
116.7725824
-37.6543548
-116.5526066
3.9049396
0.4523850
-8.5096239
28.8949464
-42.3501358
48.1448768
-23.5121379
-12.7172195
57.0458273
-65.1929505
38.3969664
34.2285735
-95.5197978
115.8633682
-4.5982513
11.9530217
-11.9742330
4.9861861
16.8836083
-35.5669845
46.6451138
-26.3462225
-9.0627810
54.7311263
-65.2400266
39.7515315
33.3081435
8.6323819
-19.8147237
34.9877329
-36.9170388
26.5335359
4.8092561
-33.3796136
51.3683152
-32.4615133
-6.1598951
55.0110130
-67.6136147
-0.8460931
10.2716938
-21.6685806
36.8924541
-37.6529131
26.8106782
5.4577389
-33.0221014
50.9439791
-30.7644822
-6.4503955
-0.9567375
0.8229288
7.6711059
-18.8404612
34.3420732
-36.2078282

26.4665014
4.8375154
-32.2236221
50.3885895
7.2066140
-13.8408447
19.5591867
-12.4915784
-2.5349009
25.3703967
-35.4370268
29.4061871
0.9842606
-3.7231133
14.1504340
-22.7351155
28.9256215
-18.2395870
0.3377077
26.6500968
-35.3603218
2.9838583
-9.2770994
21.3089342
-30.2822295
33.6354208
-20.6097233
-0.6232440
3.1381484
-2.6841030
-1.2754208
12.7390754
-23.7171823
30.0812136
-3.2961190
9.7005767
-9.4250492
5.5014790
11.5115987
5.0045402
-13.4602315
19.3884635
-18.9831206
-1.9639702
10.0205333
-14.4569047
1.4687932
-5.9882208
0.5378412

Mit dem auf den vorigen Seiten beschriebenen Verfahren wurden die Einstellkoeffizienten für einen Fernsprechkanal bestimmt, dessen Dämpfungs- aund Gruppenlaufzeitverzerrung im Bereich von 0.3 kHz bis 3.4 kHz gegeben war (s.Abb. unten). Es wird der mittlere quadratische Fehler E der erzielten Lösung angegeben und mit der Fourier-Lösung (B=1 im gesamten Bereich) verglichen.

N	E (Gl. 3.7) =optimale Lösung.	E (Gl. 3.1) =Fourier-Lösung.
8	0.20233	0.26324
16	0.04110	0.08083
24	0.01593	0.03221
32	0.00068	0.01685
40	0.00024	0.00712





Unser Dank gilt

* Frau Ch. Hille für die Anfertigung der Zeichnungen,
* Herrn Techniker H.-P. Lenz für vielseitige Hilfe,
* dem Institut für Informationsverarbeitung an der TU Berlin (Ltg. Prof. Dr.-Ing. W. Giloi), das uns Rechenzeit am Digitalrechner CAE 90-40 zur Verfügung stellte,
* dem Institut für Regelungstechnik an der TU Berlin (komiss. Ltg. Prof. Dr.-Ing. I. Hartmann), das uns den Analogrechner Telefunken RA 800 für die Simulationen zur Verfügung stellte,
* der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die mit der Bereitstellung von Personal- und Sachmitteln diese Untersuchungen ermöglichte.